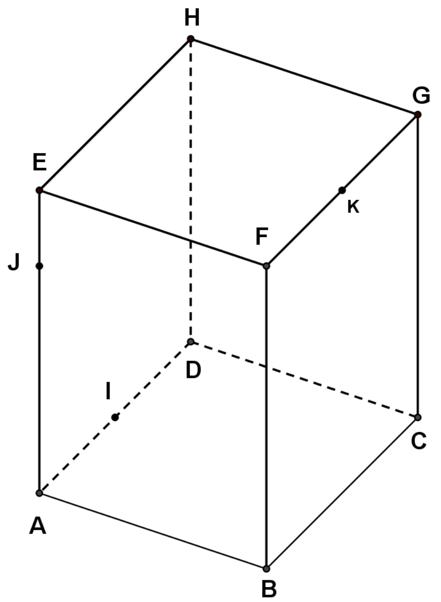
EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

. I est le milieu du segment [AD] ;

. J est tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;

. K est le milieu du segment [FG].



Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1.a. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
1.b. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}(4;a;b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
1.c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x-6y-4z+3=0$.

2.a. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).
2.b. Calculer les coordonnées du point N, intersection duplan (IJK) et de la droite (CG).
2.c. Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

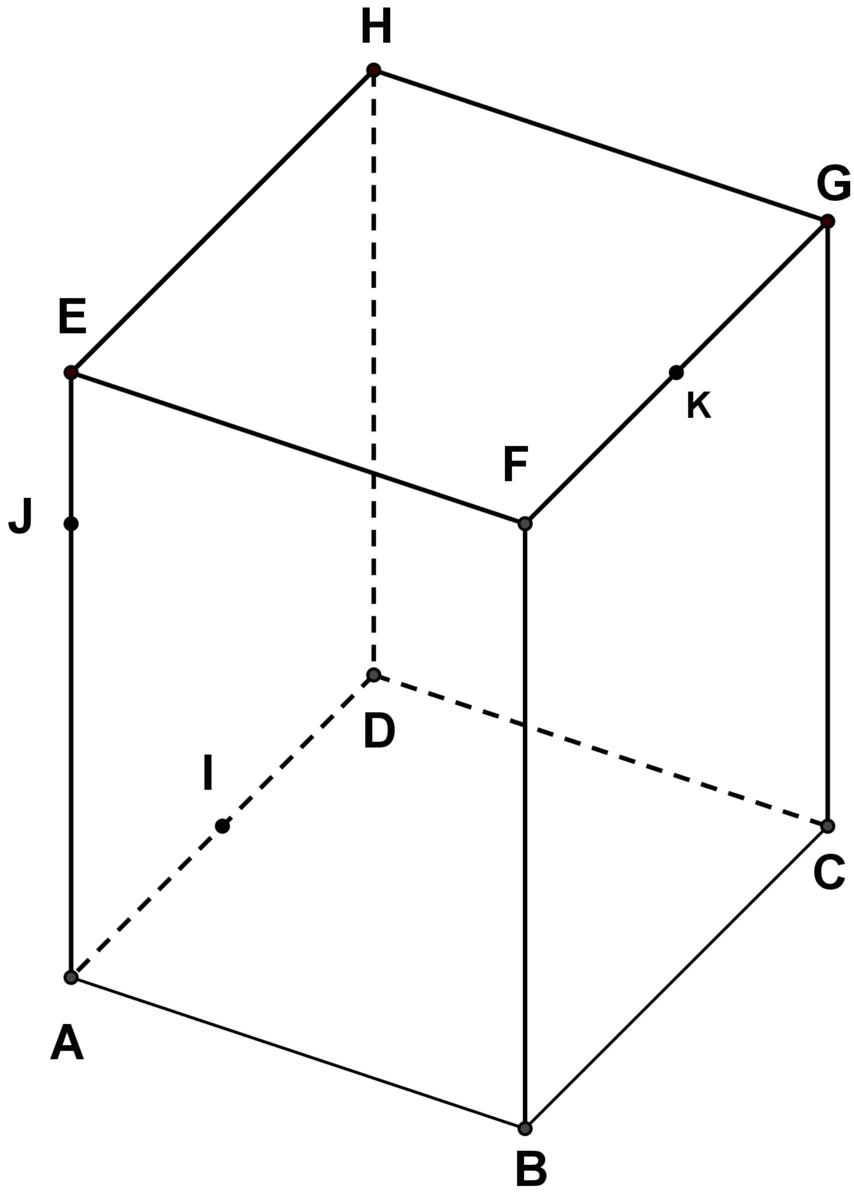
Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points M(x;y;z) tels que $\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\\0<z<1\end{cases}$.

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

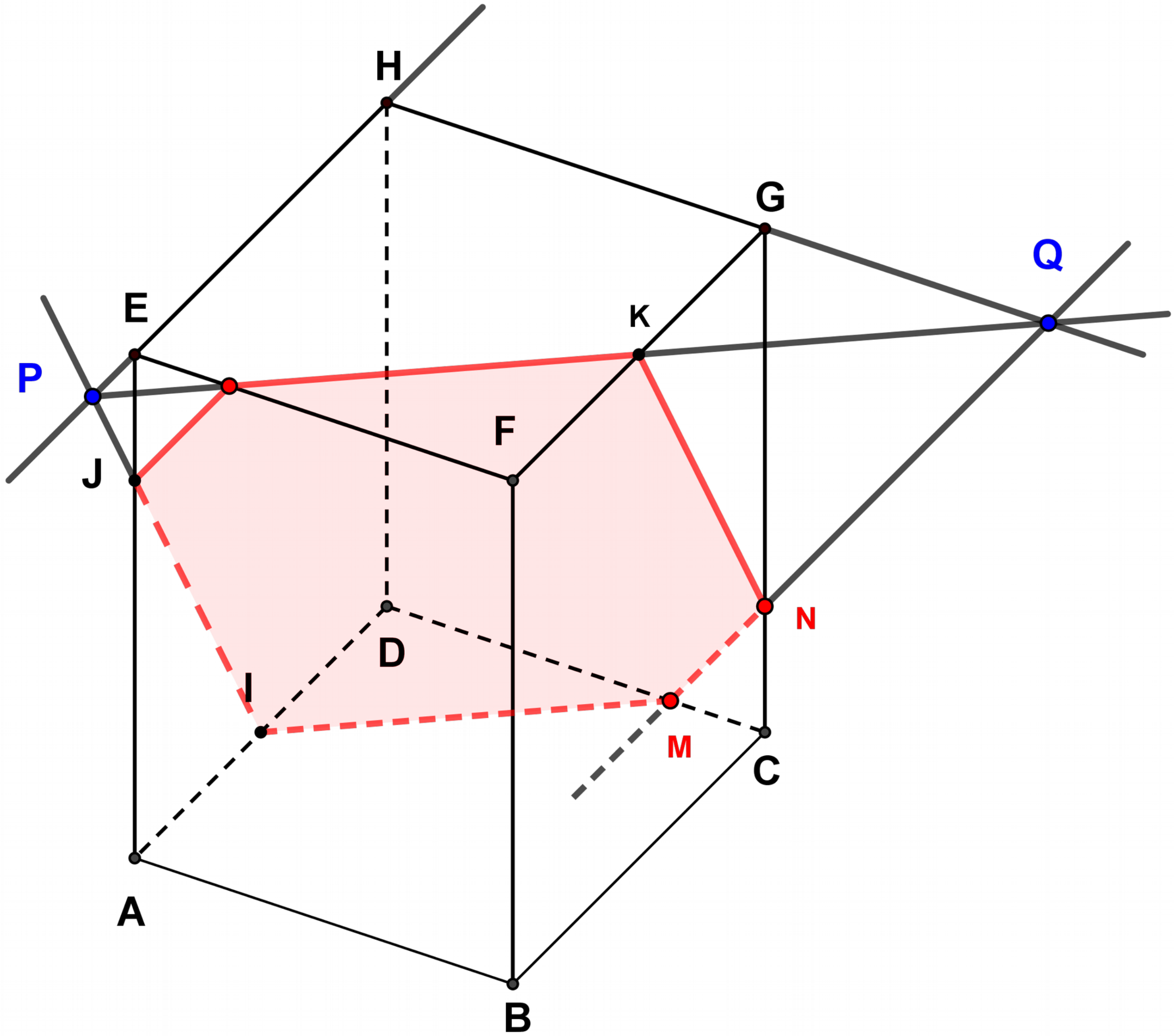
ANNEXE (à rendre avec la copie)



CORRECTION

Partie A

1. Le point P est le point d'intersection de la droite (IJ) et de la droite (EF).



2. P et K appartiennent aux plans (IJK) et (EFG) donc la droite (CK) est contenue dans les deux plans.

. I appartient au plan (ABC) qui est strictement parallèle au plan (EFG) donc le point I n'appartient pas au plan (EFG) et les plans(EFG) et (IJK) ne sont pas confondus. Ces deux plans sont donc sécants.

. Conclusion

La droite d'intersection des plans (EFG) et (IJK) est la droite (PK)

Partie B

1.a. Les coordonnées des sommets du cube dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont :

A(0;0;0) B(1;0;0) C(1;1;0) D(0;0;1) E(0;0;1) F(1;0;1) G(1;1;1) H(0;1;1)

et **I(0;0,5;0)** **J(0;0;0,75)** **K(1;0,5;1)**

1.b. $\overrightarrow{IJ}(0;-0,5;0,75)$ $\overrightarrow{IJ}(1;0;1)$ $\vec{n}(4;a;b)$

$\overrightarrow{IJ}.\vec{n}=0\times4+(-0,5)\times a+0,75\times b=-0,5a+0,75b$

$\overrightarrow{IK}.\vec{n}=1\times4+a\times0+1\times b=4+b$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ si et seulement si $\begin{cases} -0,5a+0,75b=0 \\ 4+b=0 \end{cases}$

On obtient $b=-4$ et $-0,5a-3=0 \Leftrightarrow a=-6$.

Conclusion

$\vec{n}(4;-6;-4)$

1.c. Le vecteur non nul $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

M(x;y;z) apartient au plan (IJK) si et seulement si

$\overrightarrow{IM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-0)\times4+(y-0,5)\times(-6)+(z-0)\times(-4)=0 \Leftrightarrow$ **4x-6y-4z+3=0**

2.a. $\overrightarrow{CG}(0;0;1)$ C(1;1;0)

(CG) : $\begin{cases} x=0\times t+1 \\ y=0\times t+1 \\ z=1\times t+0 \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$ soit (CG) : $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

2.b. On résout le système :

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \\ 4x-6y-4z+3=0 \end{cases}$$

On obtient :

$4\times1-6\times1-4\times t+3=0 \Leftrightarrow -4t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}=0,25$.

Le point N a pour coordonnées (1;1;0,25).

2.c. On place le point N. Le point Q est le point d'intersection des droites (PK) et (HG). La droite (NQ) coupe la droite(DC) en M.

La section du cube par le plan (IJK) est l'hexagone coloré en rouge.

Remarque

Cet hexagone n'est pas régulier mais ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Partie C

(Δ) est la droite orthogonale au plan (IJK) passant par F et R est le point d'intersection de (Δ) et (IJK).

(Δ) : $\begin{cases} x=4\lambda+1 \\ y=-6\lambda \\ z=-4\lambda+1 \end{cases}$ λ décrit $\mathbb{R}$. On résout le système $\begin{cases} x=4\lambda+1 \\ y=-6\lambda \\ z=-4\lambda+1 \\ 4x-6y-4z+3=0 \end{cases}$

On obtient : $4(4\lambda+1)-6(-6\lambda)-4(-4\lambda+1)+3=0 \Leftrightarrow (16+36+16)\lambda+4-4+3=0 \Leftrightarrow 68\lambda+3=0$

$\lambda=-\frac{3}{68}$ $x=-\frac{12}{68}+1=\frac{56}{68}<1$ $y=\frac{18}{68}<1$ $z=\frac{12}{68}+1=\frac{86}{68}>1$

z>1 donc le point R n'est pas intérieur au cube.

