Exercice 2 — 3 points

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes **1+i** et **1-i.**

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n=(1+i)^n+(1-i)^n$$

2.a. Déterminer la forme algébrique de S_n .

2.b. Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n=0$.

CORRECTION

1. $z_1=1+\mathrm{i}$ $\quad |z_1|^2=|1+\mathrm{i}|^2=1^2+1^2=2$ $\quad |z_1|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2=1-\mathrm{i}=\bar{z}_1$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

2.a. Pour tout entier naturel n :

$$S_n=z_1^n+z_2^n=z_1^n+\bar{z}_1^{\,n}=z_1^n+\overline{z_1^n}=2\mathcal{R}\mathrm{el}(\,z_1^n\,)$$

$$|z_1^n|=|z_1|^n=\sqrt{2}^{\ n}$$

$$S_n=2(\sqrt{2})^n\cos(\arg(z_1^n))$$

La partie imaginaire de S_n est nulle. On a donc écrit la forme algébrique de S_n .

2.b. S_n est donc un nombre réel.

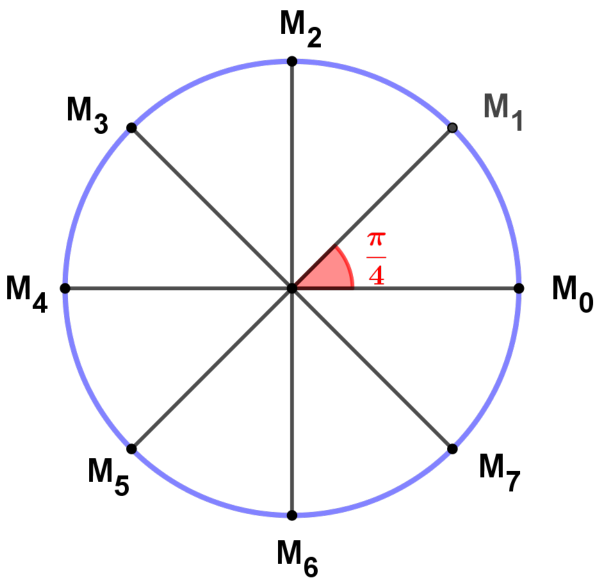
Si $S_n>0$ alors $\arg(S_n)=0 \quad (2\pi)$ $\qquad S_n=2(\sqrt{2})^n(\cos(0)+\mathrm{i}\sin(0))$

Si $S_n<0$ alors $\arg(S_n)=\pi \quad (2\pi)$ $\qquad S_n=-2(\sqrt{2})^n(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi))$

Si $S_n=0$ alors on ne peut pas écrire S_n sous forme trigonométrique.

Pour déterminer le signe de S_n , il suffit de déterminer pour tout entier naturel n, $\arg(z_1^n)$.

Sur un cercle trigonométrique, on place les points M_n d'affixe Z_n de module 1 et d'argument : $\arg(z_1^n)$.



$z_1^0=1$ $\qquad M_0(Z_0) \quad Z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}$

$z_1^1=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad \arg(z_1^1)=\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ $\qquad M_1(Z_1) \quad Z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$z_1^2=(\sqrt{2})^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2$ $\quad \arg(z_1^2)=\arg(z_1)+\arg(z_1) \quad (2\pi)$

$\arg(z_1^2)=2\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ $\qquad M_2(Z_2) \quad Z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z_1^3=(\sqrt{2})^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3$ $\quad \arg(z_1^3)=\arg(z_1^2)+\arg(z_1) \quad (2\pi)$

$\arg(z_1^3) = 3\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ $\quad M_3(Z_3) \quad Z_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_1^4 = (\sqrt{2})^4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \quad \arg(z_1^4) = \arg(z_1^3) + \arg(z_1) \quad (2\pi)$

$\arg(z_1^4) = \pi \quad (2\pi)$ $\quad M_4(Z_4) \quad Z_4 = e^{i\pi}$

$z_1^5 = (\sqrt{2})^5\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 \quad \arg(z_1^5) = \arg(z_1^4) + \arg(z_1) \quad (2\pi)$

$\arg(z_1^5) = 5\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ $\quad M_5(Z_5) \quad Z_5 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_1^6 = (\sqrt{2})^6\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 \quad \arg(z_1^6) = \arg(z_1^5) + \arg(z_1) \quad (2\pi)$

$\arg(z_1^6) = 3\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ $\quad M_6(Z_6) \quad Z_6 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z_1^7 = (\sqrt{2})^7\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7 \quad \arg(z_1^7) = \arg(z_i^6) + \arg(z_1) \quad (2\pi)$

$\arg(z_1^7) = \arg(z_1^6) + \arg(z_1) \quad (2\pi)$ $\quad M_7(Z_7) \quad Z_7 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$z_1^8 = (\sqrt{2})^8\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 \quad \arg(z_1^8) = \arg(z_1^7) + \arg(z_1) \quad (2\pi)$

$\arg(z_1^8) = 0 \quad (2\pi)$ $\quad M_8 = M_0 \quad Z_8 = Z_0 = 1$

Affirmation A : Vraie

Nous avons démontré que $S_n = 2(\sqrt{2})^n \cos(\arg(z_1^n))$

Affirmation B : Vraie

On peut démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\arg(z_1^n) = n\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.

On effectue la division euclidienne de n par 8 : $n = 8\times k + r \qquad 0 \leqslant r \leqslant 7$

Si $r = 2$ ou $r = 6$ alors $\cos(\arg(z_1^n)) = 0$ et $S_n = 0$