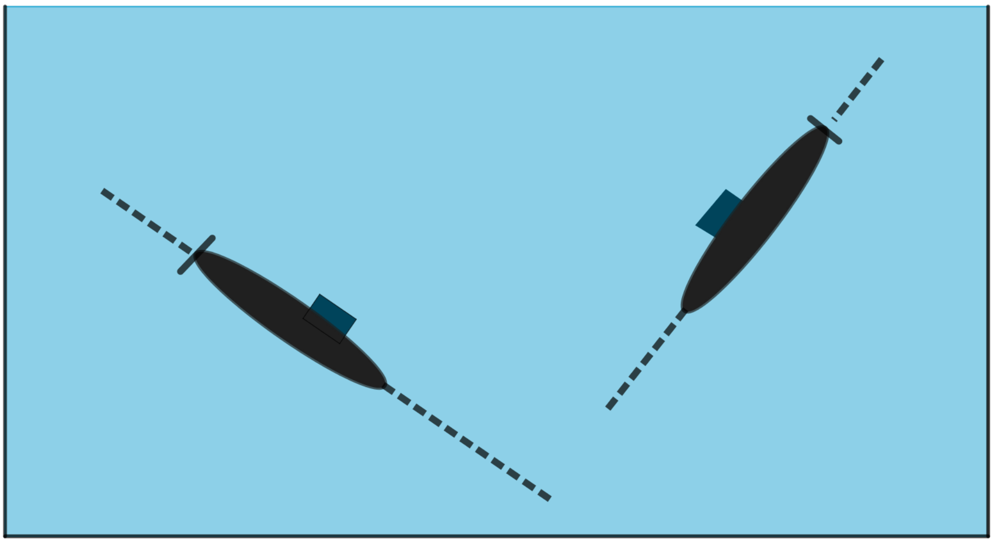
Exercice 3 4 points

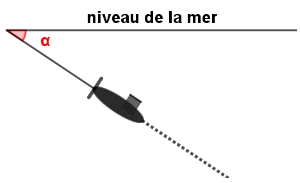
L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous marins en phase de plongée.



On considère que ces sous marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes,le premier sous marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ dont l'unité est le mètre.
Le plan $(O;\vec{i};\vec{j})$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t)=140-60t \\ y(t)=105-90t \\ z(t)=-170-30t \end{cases}$

1.a. Donner les coordonnées du sous marin au début de l'observation.
1.b. Quelle est la vitesse du sous-marin ?
1.c. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.



Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avac le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.

2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées (68;135;-68) et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées (-202;-405;-248) avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

CORRECTION

1.a. Pour t=0 $S_1(0)$ **(140;105;170).**

1.b. pour t=1 (une minute) $S_1(1)$ (80;15;-200)

La distance, en mètre, entre ces deux points est :

$S_i(0)S_1(1)^2=(80-140)^2+(15-105)^2+(-200+170)^2=60^2+90^2+30^2=30^2(4+9+1)=14\times 30^2$

Le sous-marin parcourt en, 1 minute, la distance de $30\sqrt{14}$ m.

La vitesse (constante) du sous-marin, en mètre par minute est : $30\sqrt{14}\ \ m\times min^{-1}$

En kilomètre par heure : $\frac{30\times\sqrt{14}\times 60}{1000}=1{,}8\sqrt{14}\,km\times h^{-1}$ = **6,73** $km\times h^{-1}$ **.**

1.c. La Trajectoire du sous-marin est contenue dans la droite (D) passant par le point $S_1(0)$ et de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=140-60t\\y=105-90t\\z=-170-30t\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

Le plan défini par $(O;\vec{i};\vec{j})$ représente la surface de la mer, ce plan a pour équation : z=0.

On détermine les coordonnées du point d'intersection A du plan $(O;\vec{i};\vec{j})$ et de la droite (D).

On obtient : $-170-30t=0 \Leftrightarrow t=\frac{17}{3}$.

$x=140-\frac{60\times 17}{3}=140-340=-200$

$y=105-\frac{90\times 17}{3}=105-510=-405$.

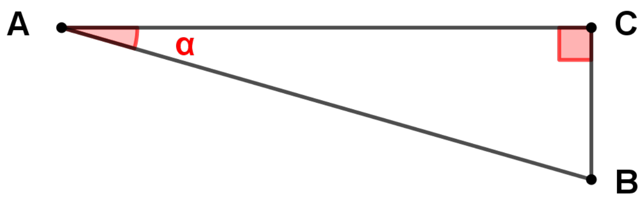
Les coordonnées du point A sont : (-200;-405;0).

On note $B=S_1(0)$ B(140;105;-170).

Soit C le point du plan $(O;\vec{i};\vec{j})$ ayant la même abscisse et la même ordonnée que B, C(140;105;0).

(BC) est perpendiculaire au plan $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le triangle ABC est rectangle en C.



$AB^2=340^2+510^2+170^2=170^2(4+9+1)=170^2\times 14$ $AB=170\sqrt{14}$

$AC^2=340^2+510^2=170^2(4+9)=170^2\times 13$ $AC=170\sqrt{13}$

$\cos(\alpha)=\frac{AC}{AB}=\sqrt{\frac{13}{14}}$

En utilisant la calculatrice, on obtient : α **= 15,5° .**

2. La trajectoire du deuxième sous-marin est contenue dans une droite donc les coordonnées de $S_2(t)$ à l'instant t vérifient $\begin{cases}x(t)=68+at\\y(t)=135+bt\\z(t)=-68+ct\end{cases}$ a, b et c sont des réels à déterminer.

À l'instant t=3, $S_2(3)$ (-202;-405;-248) ce résultat permet de calculer les constantes a, b et c.

La question posée ne fait intervenir que la profondeur donc in n'est nécessaire de alculer que c.

$-68+3c=-248 \Leftrightarrow c=-\frac{180}{3}=-60$

Pour tout instant t : z(t)=-68-60t

Les deux sous-marins seront à la même profondeur lorsque :

$$-68-60t=-170-30t \quad \Leftrightarrow \quad 102=30t \quad \Leftrightarrow t=\frac{102}{30}$$

t = 3,4 min soit 3min24s.