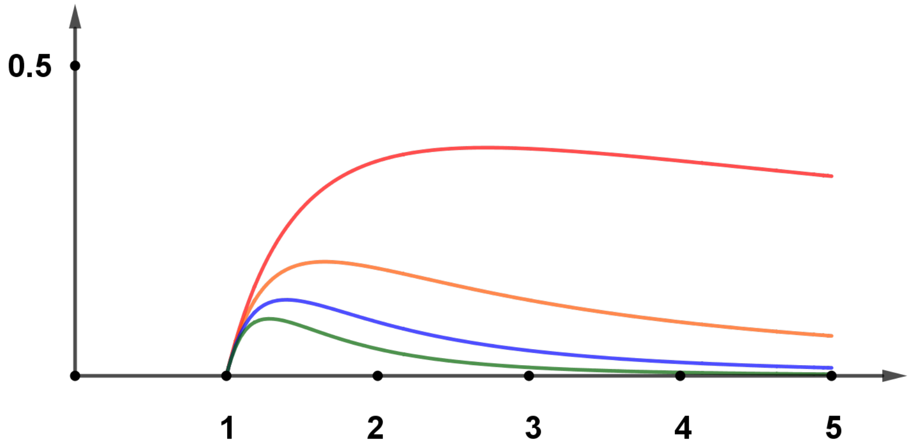
Exercice 4 5 points

On considère, pour tout entier n > 0, les fonctions f_n définies sur [1;5] par : $f_n(x)=\frac{\ln(x)}{x^n}$.

Pour tout entier n > 0, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes C_n pour n appartenant à $\{1;2;3;4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier n > 0 et tout nombre réel x de l'intervalle [1;5] : $f'_n(x)=\frac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

2. Pour tout entier n > 0, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle [1;5].

On note A_n , le point de la courbe C_n ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation : $y=\frac{1}{e}\ln(x)$.

3.a. Montrer que pour tout entier n > 1 et tout réel x de l'intervalle [1;5] :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

3.b. Montrer que pour tout entier n > 1 :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

3.c. Pour tout entier n > 0, on s'intéresse à l'aire , exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe de la fonction f_n , c'est à dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations x = 1, x = 5 y = 0 et la courbe C_n .

Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

1. Pour tout entier n non nul et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;5]: f_n(x)=\frac{\ln(x)}{x^n}$.

f_n est dérivable sur [1;5]

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et $(x^n)'=n\,x^{n-1}$

$$f'_n(x)=\frac{x^n\times\frac{1}{x}-n\,x^{n-1}\ln(x)}{(x^n)^2}=\frac{x^{n-1}(1-n\ln(x))}{x^{2n}}=\frac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

2. On admet que pour tout entier n non nul, f_n admet un maximum sur l'intervalle [1;5].

Remarque

Pour tout entier naturel n non nul, $f_n(1)=0$; $f_n(e)=\frac{1}{e^n}$ et $f_n(5)=\frac{\ln(5)}{5^n}$.

On peut facilement démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n que : $\frac{1}{e^n}>\frac{\ln(5)}{5^n}$.

Par conséquent le maximum de f_n sur [1;5] est obtenu pour une valeur de x appartenant à]1;5[

A_n est le point de C_n d'ordonnée ce maximum, f_n étant dérivable sur [1;5], l'abscisse x_n de A_n vérifie $f'(x_n)=0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-n\ln(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}=\ln(x) \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{n}}$.

Pour tout entier naturel n non nul $0<\frac{1}{n}\leqslant 1$ donc $1=e^0<e^{\frac{1}{n}}\leqslant e^1<5$.

$$f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}=\frac{\frac{1}{n}}{e}=\frac{1}{ne}$$

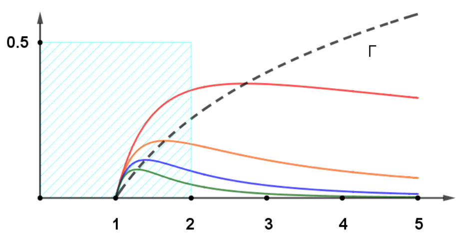
$A_n\left(e^{\frac{1}{n}};\frac{1}{ne}\right)$ $\qquad A_n(x;y)$

$\ln(x)=\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}$ donc $y=\frac{1}{en}=\frac{1}{e}\ln(x)$

Conséquence

Le point A_n appartient à la courbe Γ d'équation : $y=\frac{1}{e}\ln(x)$

On joint sur le graphique suivant (non demandé) la courbe Γ



3.a. ln est croissante sur $]0;+\infty[$.

Si $1\leqslant x\leqslant 5$ alors $\ln(1)\leqslant\ln(x)\leqslant\ln(5)$ soit $0\leqslant\ln(x)\leqslant\ln(5)$.

Pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x de l'intervalle [1;5] : $x^n>0$

donc $0\leqslant\frac{\ln(x)}{x^n}\leqslant\frac{\ln(5)}{x^n}$.

3.b. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction g_n définie sur l'intervalle [1;5] par :
$g_n(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$.

La fonction G_n définie sur l'intervalle [1;5] par : $G_n(x)=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{x^{n-1}}$ est une primitive de g_n sur [1;5] donc $\int_1^5 g_n(x)dx = G_n(5)-G_n(1)=-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{5^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\times 1=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

3.c. Le repère n'est pas orthonormé.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle ayant pour base 2 unités sur l'axe des abscisses et pour hauteur 05 unité sur l'axe des ordonnées.
f_n est continue et positive sur [1;5], donc l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité des droites d'équations x=1, x=5 et y==0 et la courbe C_n est $S_n = \int_1^5 f_n(x)dx$.

Or pour tout entier naturel n non nul et pour nombre réel x de l'intervalle [1;5] :
$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\ln(5)}{x^5} \leqslant \ln(5)\times g_n(x)$

donc $0 \leqslant \int_1^5 f_n(x)dx \leqslant \ln(5)\times \int_1^5 g_n(x)dx = \ln(5)\times\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5n-1}\right)$.

$\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1}=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5^{n-1}}=0$ et on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0$.

<u>Conséquence</u>
$\lim_{n\to+\infty}\ln(5)\times\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que : $\lim_{n\to+\infty} S_n=0$.