Exercice 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

. Si le joueur gagne une partie la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$.

. Si le joueur perd une partie la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$.

. La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement : « la $n^{\text{ième}}$ partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement.

On a donc $p_1=\frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2=\frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1}=-\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n.

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0.4375	0.3906	0.4023	0.3994	0.4001	0.3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n=p_n-\frac{2}{5}$.

4.a. Déontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la zaison.

4.b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n=\frac{2}{5}-\frac{3}{20}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

4.c. La suite (u_n) converge-t-elle ? Interpréter le résultat.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

. La probabilité de la première partie est : $\frac{1}{4}$ donc $P(G_1)=\frac{1}{4}$ et $P(\bar{G}_1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

. Si un joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$ donc

$P_{G_1}(G_2)=\frac{1}{4}$ et $P_{G_1}(\bar{G}_2)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

. Si un joueur perd un partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$ donc

$P_{\bar{G}_1}(\bar{G}_2)=\frac{1}{2}$ et $P_{\bar{G}_1}(G_2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

. En utilisant la formule des probabilités totales :

$p_2=P(G_2)=P(G_1\cap G_2)+P(\bar{G}_1\cap G_2)=P(G_1)\times P_{G_1}(G_2)+P_{\bar{G}_1}(G_2)$

$p_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{16}$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$P(G_n)=p_n$; $P(G_{n+1})=p_{n+1}$; $P_{G_n}(G_{n+1})=\frac{1}{4}$; $P_{G_n}(\bar{G}_{n+1})=\frac{3}{4}$; $P_{\bar{G}_n}(\bar{G}_{n+1})=\frac{1}{2}$ et $P_{\bar{G}_n}(G_{n+1})=\frac{1}{2}$.

$p_{n+1}=P(G_n\cap G_{n+1})+P(\bar{G}_n\cap G_{n+1})=P(G_n)\times P_{G_n}(G_{n+1})+P(\bar{G}_n)\times P_{\bar{G}_n}(G_{n+1})$

$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{4}+(1-p_n)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n=-\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}$.

3. Conjecture

p_n **prend des valeurs « très voisines » de 0,4 lorsque n devient grand.**

4. Pour tout entier naturel n non nul.

$u_n=p_n-\frac{2}{5}$ donc $p_n=u_n+\frac{2}{5}$

4.a. Pour tout entier n non nul

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{2}{5}=\left(-\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}\left(u_n+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=-\frac{1}{4}u_n.$$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1=p_1-\frac{2}{5}=\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{3}{20}$ et de raison $q=-\frac{1}{4}$.

4.b. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n=u_1\times q^{n-1}=-\frac{3}{20}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Donc $p_n=u_n+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}-\frac{3}{20}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

4.c. $-1<-\frac{1}{4}<0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{2}{5}=0,4$.

La conjecture est donc vérifiée.