Exercice 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On définit la suite de réels (a_n) par :

$a_0=0$ et $a_1=1$ et pour tout entier naturel n non nul : $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$.

On appelle cette suite la suite de Fibonacci.

1.a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n .

```
1  A ← 0
2  B ← 1
3  Pour i allant de 2 à n
4     C ← A+B
5     A ← . . ..
6     B ← . . . .
7  Fin Pour
```

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite (a_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Calculer A^2, A^3 et A^4.

Vérifier que $A^5=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

3. On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel non nul, $A^n=\begin{pmatrix}a_{n+1} & a_n\\ a_n & a_{n-1}\end{pmatrix}$.

3.a. Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p\times A^q$ et en déduire que :

$a_{p+q}=a_p\times a_{q+1}+a_{p-1}\times a_q$.

3.b. En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q , alors r divise également a_{p+q} .

3.c. Soit p un entier naturel non nul. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np} .

4.a. Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est pas un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

4.b. On peut calculer : $a_{19}=4181=37\times 113$.

Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4.a. ?

CORRECTION

1.

```
1  A ← 0
2  B ← 1
3  Pour i allant de 2 à n
4     C ← A+B
5     A ← B
6     B ←.C
7  Fin Pour
```

2. $A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times1&1\times1+1\times0\\1\times1+0\times1&1\times1+0\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+1\times1&2\times1+1\times0\\1\times1+1\times1&1\times1+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3\times A=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1+2\times1&3\times1+2\times0\\2\times1+1\times1&2\times1+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$

$A^5=A^4\times A=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times1+3\times1&5\times1+3\times0\\3\times1+2\times1&3\times1+2\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}$

3. Pour tout entier naturel n non nul :

$A_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}&a_n\\a_n&a_{n-1}\end{pmatrix}$

3.a. Pour tous entiers naturels non nuls p et q :

$A^p=\begin{pmatrix}a_{p+1}&a_p\\a_p&a_{p-1}\end{pmatrix}$; $A^q=\begin{pmatrix}a_{q+1}&a_q\\a_q&a_{q-1}\end{pmatrix}$ et $A^{p+q}=\begin{pmatrix}a_{p+q-1}&a_{p+q}\\a_{p+q}&a_{p+q-1}\end{pmatrix}$

$A^p\times A^q=\begin{pmatrix}a_{p+1}\times a_{q+1}+a_p\times a_q&a_{p+1}\times a_q+a_p\times a_{q-1}\\a_p\times a_{q+1}+a_{p-1}\times a_q&a_p\times a_q+a_{p_1}\times a_{q-1}\end{pmatrix}$

donc $a_{p+q}=a_p\times a_{q+1}+a_{p-1}\times a_q$

Remarque

On a aussi $a_{p+q}=a_{p+1}\times a_q+a_p\times a_{q-1}$

On obtient cette égalité en utilisant les résultats précédents ou en écrivant : $a_{p+q}=a_{q+p}$.

3.b. On admet que a_n est un entier naturel pour tout entier naturel n.

p et q sont deux entiers naturels non nuls.

Si l'entier naturel r divise a_p et a_q alors ils existent deux entiers naturels k et h tels que $a_p=k\times r$ et $a_q=h\times r$.

Or $a_{p+q}=a_p\times a_{q+1}+a_{p-1}\times a_q=(k\times r)\times a_{q+1}+a_{p-1}\times(h\times r)=r\times(k\times a_{q+1}+h\times a_{p-1})$

$K=k\times a_{q+1}+h\times a_{p-1}$ est un entier naturel donc r divise a_{p+q}.

3.c. p est un entier naturel non nul fixé.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : a_p divise a_{np}.

Initialisation

Pour $n=1$ $a_{np}=a_{1\times p}=a_p$ donc a_p divise $a_{1\times p}$.

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n non nul, on suppose que a_p divise a_{np} et on doit démontrer que a_p divise $a_{(n+1)p}$.

Or $a_{(n+1)p}=a_{np+p}=a_{p+np}$

$np=q$ est un entier naturel non nul.

$a_{(n+1)p}=a_{p+q}$.

a_p divise a_p et $a_q=a_{np}$ donc a_p divise $a_{p+q}=a_{(n+1)p}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul p, on a : a_p divise a_{np} .

4.a. On admet que la suite (a_n) est strictement croissante pour tout entier naturel n supérieur on égal à 2.

En utilisant le tableau de la question 1. on a : si $n \geqslant 5$ alors $a_n \geqslant 5$.

On suppose que n est un entier naturel non premier supérieur ou égal à 5, soit p le plus petit diviseur premier de n donc $p \geqslant 2$.

$n=pq$, nous avons $n \geqslant 5$ donc $q \geqslant 3$ et $a_q \geqslant 2$ car ($a_3=2$).

En utilisant la question 3.c. a_q divise a_{pq} .

$p \geqslant 2 > 1$ et $q \geqslant 3$ donc $pq \geqslant 2q > q$.

Conséquence

$a_{pq}=a_q \times K$ avec $K \geqslant 2$;

a_n **n'est pas un nombre premier.**

4.b. $a_{19}=4181=37\times 113$

La réciproque de la propriété obtenue dans la question 4.a. est : si n est un entier premier supérieur ou égal à 5 alors a_5 est premier.

Or 19 est un entier premier et a_{19} n'est pas un nombre premier.

Conclusion

La réciproque de la propriété obtenue dans la question 4.a. est fausse.