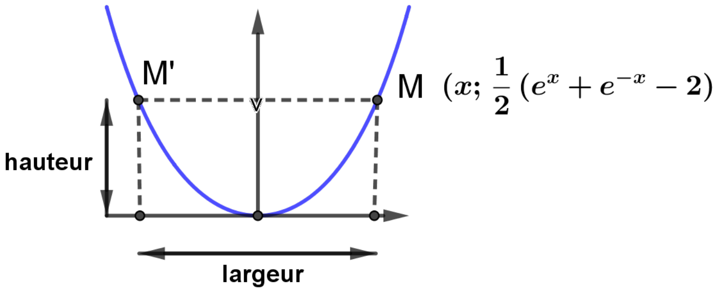
Exercice 1 — 6 points

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation : $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}-2)$.

Cette courbe est appelée une « chaînette ».
On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation :
$(E) :\ e^x+e^{-x}-4x-2=0$.

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=e^x+e^{-x}-4x-2$.

2.a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}-4\right)+e^{-x}-2$.

2.b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3.a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0;+\infty[$.

3.b. Montrer que l'équation $f'(x)=0$ équivaut à l'équation : $(e^x)^2-4e^x-1=0$.

3.c. En posant $X=e^x$, montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution réelle le nombre :
$\ln(2+\sqrt{5})$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f .

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	

4.a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4.b. Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution strictement positive que l'on notera α .

5. On considère L'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

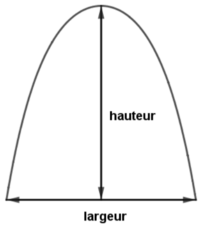
```
Tant que b-a >0.1 faire:
   m ← (a+b)/2
   Si e^m + e^(-m) - 4m - 2 > 0 ,alors:
      b ← m
   Sinon:
      a ← m
   Fin Si
Fin Tant que
```

5.a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-dessous avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	b-a
	2	3	1
2.5			
. . .	. . .	. . .	

5.b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin de l'algorithme à la question précédente ?

6. La *Gateway Arch,* édifiée dans la ville de Saint-Louis au États-Unis, a l'allure ci-dessous.



Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.
La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation

$$(E'):\ e^{\frac{t}{39}}+e^{\frac{-t}{39}}-4\frac{t}{39}-2=0 \quad .$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch.*

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x positif, la largeur de la chaînette est égale à 2x et la hauteur de la chaînette est égale à $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}-2)$.

La largeur de la chaînette est égale à sa hauteur si et seulement si $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}-2)=2x$

$\Leftrightarrow \quad e^x+e^{-x}-2=-4x \quad \Leftrightarrow \quad e^x+e^{-x}-4x-2=0$

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=e^x+e^{-x}-4x-2$.

2.a. Pour tout nombre réel x strictement positif :

$x\left(\frac{e^x}{x}-4\right)=e^x-4x$ donc $f(x)=e^x+e^{-x}-4x-2=x\left(\frac{e^x}{x}-4\right)+e^{-x}-2$.

2.b. Nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}4\right)=+\infty$, d'autre part $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=0$

Conséquence

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3.a. $(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=e^x-e^{-x}-4$

3.b. $f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x-e^{-x}-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x-\frac{1}{e^x}-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(e^x)^2-1-4e^x}{e^x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2-4e^x-1=0$

3.c. On pose $X=e^x$ et on obtient l'équation : $X^2-4X-1=0$.

$\Delta=16-4\times(-1)\times1=20$

$X'=\frac{4-\sqrt{20}}{2}=\frac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5} < 0$

$X''=\frac{4+\sqrt{20}}{2}=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5} > 0$

$e^x=2-\sqrt{5}$ cette équation n'admet pas de solution.

$e^x=2+\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2+\sqrt{5})$

Conclusion

L'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution réelle : $\ln(2+\sqrt{5})$.

4.a. En utilisant le tableau de signes de la fonction dérivée, on obtient le tableau de variations de f.

x	0		$ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	M	↗	$+\infty$

$f(0)=e^0+e^0-4\times0-2=0$

On obtient en utilisant la calculatrice $M=f(\ln(2+\sqrt{5}))=-0{,}33$ à 10^{-2} près.

4.b. Sur l'intervalle $]0;\ln(2+\sqrt{5})[$, f est strictement négative donc l'équation f(x)=0 n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0;\ln(2+\sqrt{5})[$.

f est continue et strictement croissante sur $[\ln(2+\sqrt{5});+\infty[$, $f(\ln(2+\sqrt{5}))< 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permert d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[\ln(2+\sqrt{5});+\infty[$

Conclusion

L'équation f(x)=0 admet une unique solution α strictement positive.

5.a. En utilisant la calculatrice on obtient :

m	a	b	b-a
	2	3	1
2.5	2	2.5	0.5
2.25	2.25	2.5	0.25
2.375	2.375	2.5	0.125
2.4375	2.4375	2.5	0.0625

$f(2{,}5)=0{,}26>0$, $f(2{,}25)=-1{,}4<0$, $f(2{,}375)=-0{,}66<0$, $f(2{,}4375)=-0{,}22<0$

On peut obtenir ces résultats en effectuant une programmation en Python de l'algorithme

```
print('Début de programme')
from math import*
a=2
b=3
while(b-a>0.1):
    m=(b+a)/2
    if exp(m)+exp(-m)-4*m-2>0:
        b=m
        print("m="+str(m),"a="+str(a),"b="+str(b))
    else:
        a=m
        print("m="+str(m),"a="+str(a),"b="+str(b))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
m=2.5 a=2 b=2.5
m=2.25 a=2.25 b=2.5
m=2.375 a=2.375 b=2.5
m=2.4375 a=2.4375 b=2.5
Fin de programme
```

5.b. on obtient $2{,}4375<\alpha<2{,}5$

6. $(E'):\ e^{\frac{t}{39}}+e^{-\frac{t}{39}}-4\frac{t}{39}-2=0$

On pose $x=\frac{t}{39}$ et on obtient l'équation (E) : $e^{x}+e^{-x}-4x-2=0$.

L'unique solution strictement positive de cette équation est : α .

$\alpha=\frac{t}{39} \Leftrightarrow t=39\alpha$.

La largeur, en mètre, de l'arc considéré est : l= 78α

$2{,}4375<\alpha<2{,}5$

$78\times2{,}4375<21<78\times2{,}5$

$190{,}125<21<195$

La hauteur étant égale à la largeur, **la hauteur de la *Gateway Arch* comprise entre 190 m et 195 m.**