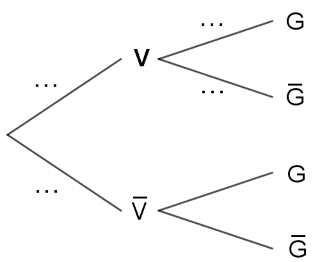
Exercice 2 4 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.
Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :
. 40 % de la population est vaccinée ;
. 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
. 20 % de la population a contracté la grippe.
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1.a. Donner la probabilité de l'événement G.
1.b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur les quatre branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*
Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n personnes interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question on suppose que n=40.
2.a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
2.b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

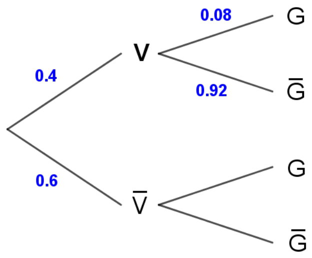
3. On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est à dire que l'on suppose ici que n=3750.
On note Z la variable aléatoire définie par : $Z=\dfrac{X-1500}{30}$.
On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut-être approchée par la loi centrée réduite.
En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

CORRECTION

Partie A

1.a. L'énoncé précise : 20 % de la population a contracté la grippe donc **$P(G)=0,2$**

1.b. 40 % de la population est vacciné donc $P(V)=0,4$
et $P(\bar{V})=1-P(V)=1-0,4=0,6$.
8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe donc $P_V(G)=0,08$
et $P_V(\bar{G})=1-P_V(G)=1-0,08=0,92$
On obtient :



2. On nous demande de calculer $P(V\cap G)$
$P(V\cap G)=P(V)\times P_V(G)=0,4\times 0,08=$ **0,032.**

3. On nous demande de calculer $P_{\bar{V}}(G)$
$$P_{\bar{V}}(G)=\frac{P(\bar{V}\cap G)}{P(\bar{V})}$$
La formule des probabilités totales nous donne :
$P(G)=P(G\cap\bar{V})+P(G\cap V)$
$P(G\cap\bar{V})=P(G)-P(G\cap V)=0,2-0,032=0,168$
$$P_{\bar{V}}(G)=\frac{0,168}{0,6}=\frac{168}{600}=\mathbf{0,28}\ .$$

Partie B

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante, on interroge au hasard un habitant de la ville :
Succès S : « l'habitant est vacciné contre la grippe », la probabilité de succès est $p=0,4$.
Échec $\bar{S}$: « l'habitant n'est pas vacciné contre la grippe », la probabilité de l'échec est $q=0,6$.
On interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs avec remise. C'est à dire on effectue n épreuves de Bernoulli indépendantes.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en n épreuves est la loi binomiale de paramètres n et 0,4.

2. $n=40$

2.a. En utilisant la calculatrice, on obtient $P(X=15)=$ **0,123**

2.b. En utilisant la calculatrice, on obtient $P(X\geqslant 20)=$ **0,130.**

3. $n=3750$
$$1450\leqslant X\leqslant 1550 \Leftrightarrow \frac{1450-1500}{30}\leqslant\frac{X-1500}{30}\leqslant\frac{1550-1500}{30} \Leftrightarrow -\frac{5}{3}\leqslant Z\leqslant\frac{5}{3}$$
Z suit la loi normale centrée et réduite .
Eu utilisant la calculatrice, on obtient :
$$P(1450\leqslant X\leqslant 1550)=P\left(-\frac{5}{3}\leqslant Z\leqslant\frac{5}{3}\right)=\mathbf{0,904.}$$