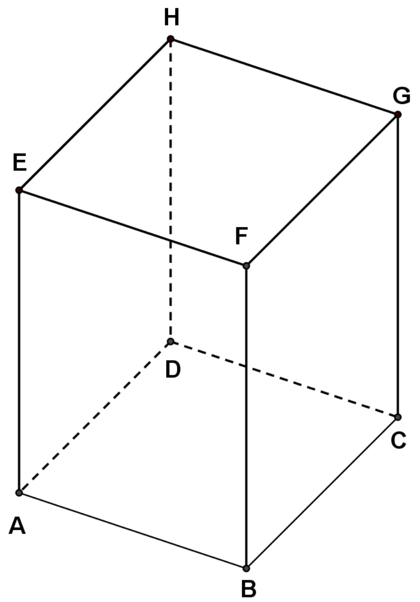
Exercice 3 5 points

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre son concourantes, c'est à dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.
On rappelle que dans le tétraèdre MNPQ, la hauteur issue de M est la droite passant par M et orthogonale au plan (NPQ).

Partie A : Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH.



On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes

1. On considère le tétraèdre ABCE.

1.a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

1.b. Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?

2. On considère le tétraèdre ACHF et on travaille dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

2.a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x-y+z=0$

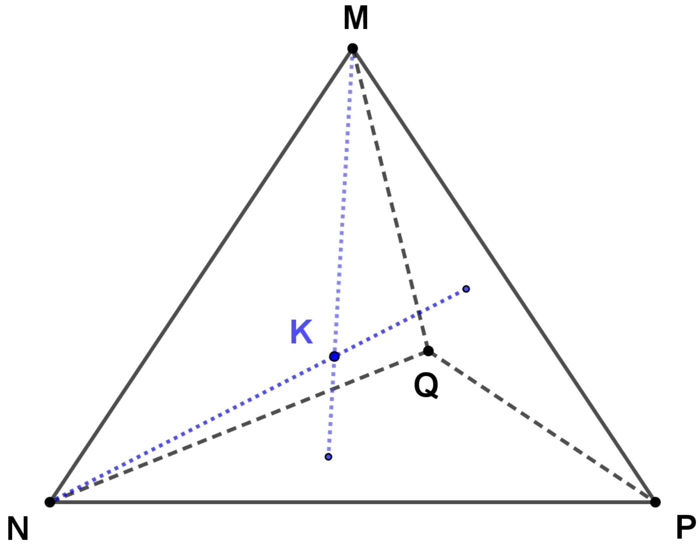
2.b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

2.c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.
Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

Dans la suite de l'exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B : Une propriété des tétraèdre orthocentrique

Dans, cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1.a. Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

1.b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

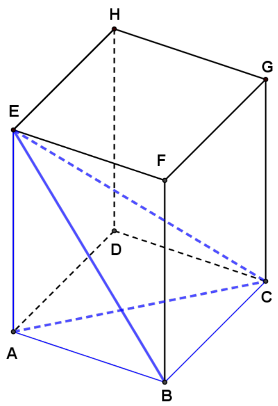
2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.
Ainsi, on obtient la propriété suivante :
Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
(On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie A : Application

Dans un repére orthonormé, on considère les points :
R(-3;5;2), S(1;4;-2), T(4;-1;5) et U(4;7;3).
Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

CORRECTION

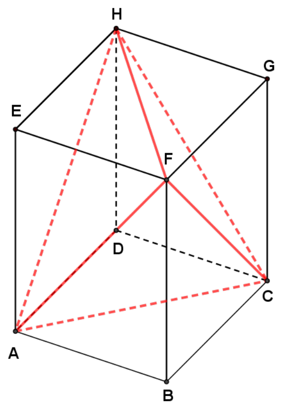
Partie A : Étude de cas particuliers



1.a.
La droite (EA) est orthogonale au plan (ABC) donc **(EA) est la hauteur du tétraèdre ABCE issue de E.**

1.b. La droite (CB) est orthogonale au plan (ABE) donc (CB) est la hauteur du tétraèdre ABCE issue de C.
Les droites (EA) et (CB) sont deux droites contenues dans deux plans contenant deux faces opposées du cube, ces deux droites sont non coplanaires donc non sécantes.
Conclusion
Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE ne sont pas concourantes.

2. $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.



On écrit les coordonnées des sommets du be.
A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;1;1) et H(0;1;1)

2.a. Une équation du plan (ACH) est x-y+z=0 si et seulement si les coordonnées des points A, C et H vérifient cette équation.
A : 0-0+0=0
C : 1-1+0=0
H : 0-1+1=0

2.b. Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ACH). $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FD}=-\vec{N}$

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est normal au plan (ACH) et **(FD) est la hauteur du tétraèdre ACHF issue de F.**

2.c. (FD) est « une grande diagonale » du cube.
On démontre de même que (HB) est la hauteur du tétraèdre ABHF issue de H et (CE) est la hauteur du tétraèdre ACFH issue de C et (AG est la hauteur du tétraèdre ABHF issue de G.

Les quatre « grandes diagonales » du cube sont concourantes donc **les quatre hauteurs de tétraèdre ACHF sont concourantes et le tétraèdre ABHF est orthocentrique.**

Remarque

Les six arêtes du tétraèdre sont égales aux diagonales des faces du cube.

Partie B : Une propriété des tétraèdre orthocentriques

1.a. (MK) est orthogonale au plan (NPQ) donc la droite (MK) est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan.

Conséquence

La droite (MK) est orthogonale à la droite (PQ)

1.b. (NK) est orthogonale au plan (MPQ) donc la droite (NK) est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan

Conséquence

La droite (NK) est orthogonale à la droite (PQ)

. La droite (PQ) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans le plan (MNK) : (MK) et (NK) donc (PQ) est orthogonale au plan (MNK).

2. (MN) est contenue dans le plan (MNK) donc **la droite (MN) est orthogonale à la droite (MN).**

Partie C : Application

R(-3;5;2), S(1;4;-2), T(4;-1;5) et (4;7;3)

$\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{TU}=4\times0+(-1)\times8+(-4)\times(-2)=0$

$\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}7\\-6\\3\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{SU}\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{RT}.\overrightarrow{SU}=7\times3-6\times3+3\times5=18\neq0$

Les arêtes [RT] et [SU] ne sont pas orthogonales donc **le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.**