Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On pose $z_0=8$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1}=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_n$

On note A_n le point d'affixe z_n.

1.a. Vérifier que : $\frac{3-i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1.b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

1.c. Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2.b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3.a. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $\frac{z_{k+1}-z_k}{z_k}=-\frac{1}{\sqrt{3}}i$.

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$

3.b. Pour tout entier naturel n, on appelle l_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0, A_1, A_3, \ldots, A_n$.
On a ainsi : $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (l_n) est convergente et calculer sa limite.

CORRECTION

1.a. $\left|\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{12}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3-i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\times\frac{1}{2}\right)$

On détermine α tel que $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha)=-\frac{1}{2}$

$\alpha=-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

donc $\frac{3-i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1.b. $z_0=8=8e^{i\times 0}$

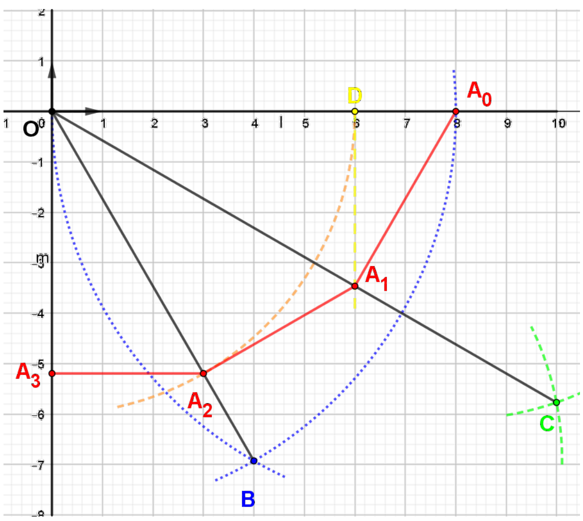
$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 8e^{i\times 0}=4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}=6e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 6e^{-i\frac{\pi}{3}}=3\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i(3\sqrt{3})$

donc z_3 est un imaginaire pur et sa partie imaginaire est égale à $-3\sqrt{3}$.

1.c.



Remarque
Dans l'énoncé, on demande de placer les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 et non une construction.
Pour la figure donnée, on a placé les points A_0 (8) et D(6) puis construit le triangle équilatéral OA_0B et [OC) la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA_0}$. On remarque que l'abscisse de A_1 est 6 et que $OA_2=6$ et que A_2 et A_3 ont la même ordonnée et on obtient une construction de ces points.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :

$z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$

Initialisation

Pour n=0 $z_0=8$ et $8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 e^0=8$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :

$z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ et on doit démontrer $z_{n+1}=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$.

Or $z_{n+1}=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_n=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}\times 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$

2.b. Pour tout entier naturel n : $u_n=|z_n|=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$0<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

3.a. Remarque

Pour tout entier naturel n :

$z_{n+1}=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_n$ donc $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}$

$\frac{z_n}{z_{n+1}}=\frac{4}{3-i\sqrt{3}}=\frac{4\times(3+i\sqrt{3})}{9+3}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3}=1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=1-\frac{z_n}{z_{n+1}}=1-1-i\frac{\sqrt{3}}{3}=-i\frac{\sqrt{3}}{3}=-i\frac{1}{\sqrt{3}}$

On obtient : $z_{n+1}-z_n=-i\frac{1}{\sqrt{3}}z_{n+1}$

donc pour tout entier naturel k

$|z_{k+1}-z_k|=\frac{1}{\sqrt{3}}|z_{k+1}| \Leftrightarrow A_kA_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$

3.b. Pour tout entier naturel non nul n

$l_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$

$l_n=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_1+\frac{1}{\sqrt{3}}OA_2+\ldots+\frac{1}{\sqrt{3}}OA_n$

$l_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1+8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\ldots+8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)=\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

Entre les parenthèses nous obtenons S_n la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right)}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})\left(\sqrt{3}-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right)}{4-3}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}l_n=\frac{8}{\sqrt{3}}\times\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{1}=8(2+\sqrt{3})=29{,}86$ à 10^{-2} près.