Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels :

$$x^2-8y^2=1 \quad \text{(E)}$$

1. Déterminer un couple solution (x;y) où x et y sont des entiers naturels.

2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par :

$x_0=1$ et $y_0=0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$.

2.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n;y_n)$ est solution de l'équation (E).

2.b. En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier n, on a : $x_{n+1}>x_n$.

3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solution.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif dr cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient a et b deux entiers naturels.
Montrer que le nombre $n=a^2b^3$ est un nombre puissant.

3. Montrer que si (x;y) est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors x^2-1 et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.
Déterminer deux nombres entiers consécutifs supérieurs à 2018.

CORRECTION

Partie A

1. $x^2-8y^2=1$ (E)

Le couple (1;0) est un couple solution de l'équation (E), le couple (3;1) est aussi un couple solution de (E).

2. A= $\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$x_0=1$ et $y_0=0$ et pour tout entier naturel n $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$

2.a. $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_{n+1}=3x_n+8y_n\\ y_{n+1}=x_n+3y_n\end{cases}$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des entiers naturels et $x_n^2-8y_n^2=1$.

Initialisation

$x_0=1$ et $y_0=0$ donc x_0 et y_0 sont des entiers naturels et $x_0^2-8y_0=1^2-8\times 0^2=1$

La propriété est vérifiée pour n=0

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que x_n et y_n sont des entiers naturels naturels et que $x_n^2-8y_n^2=1$ et on doit démontrer que x_{n+1} et y_{n+1} sont des entiers naturels et que $x_{n+1}^2-8y_{n+1}^2=1$.

Or $x_{n+1}=3x_n+8y_n$ et $y_{n+1}=x_n+3y_n$ donc x_{n+1} et y_{n+1} sont des entiers naturels et :

$x_{n+1}^2-8y_{n+1}^2=(3x_n+8y_n)^2-8(x_n+3y_n)^2=9x_n^2+48x_ny_n+64y_n^2-8(x_n^2+6x_ny_n+9y_n^2)$

$x_{n+1}^2-8y_{n+1}^2=9x_n^2+48x_ny_n+64y_n^2-8x_n^2-48x_ny_n-72y_n^2=x_n^2-8y_n^2=1$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des entiers naturels et $x_n^2-8y_n^2=1$.

2.b. On suppose que pour tout entier naturel n, $x_n>0$.

On a pour tout entier naturel n, $x_{n+1}-x_n=3x_n+8y_n-x_n=2x_n+8y_n$.

Or $x_n>0$ et $y_n\geqslant 0$ donc $x_{n+1}-x_n>0$ et $x_{n+1}>x_n$

3. On effectue un raisonnement par l'absurde.

Si on suppose qu'il existe un nombre fini de couples solutions de l'équation (E) (les couples sont classés dans l'ordre croissant des coefficients x_n ou l'ordre croissant des indices) alors soit k l'indice du dernier couple solution donc $(x_k;y_k)$ est un couple solution de (E) et le couple $(x_{k+1};y_{k+1})$ et aussi un couple solution de (E) et $x_{k+1}>x_k$ donc l'hypothèse que l'on a faite est fausse.

Conclusion

Il existe une infinité de couples solutions de l'équation(E).

Partie B

1. Remarques

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des diviseurs de 0, donc pour tout diviseur premier p de 0 p^2 est aussi un diviseur de 0 donc 0 est un nombre puissant.
- 1 n'admet aucun diviseur premier donc 1 est un nombre puissant
- Si l'entier naturels n supérieur ou égal à 2 est puissant alors les exposants de la décomposition en produit facteurs premiers sont tous supérieurs ou égaux à 2.

0 et 1 sont deux entiers consécutifs puissants

$8=2^3$ et $9=3^2$ donc 8 et 9 sont des nombres consécutifs puissants

2. Si a=0 ou b=0 alors $n=a^2b^3=0$ et n est un nombre puissant.
Si a=b=1 alors $n=a^2b^3=1$ et n est un nombre puissant.
Si $a \geqslant 2$ ou $b \geqslant 2$ et $n=a^2b^3$, tout diviseur premier p de n divise a^2 ou b^3, si p divise a^2 alors p divise a et p^2 divise a^2 et si p divise b^3 alors p divise b et p^2 divise b^3 donc n est un nombre puissant.

3. (x;y) est un couple solution de (E).
Pour tout entier naturel x, x^2 est un nombre puissant (même pour x=0 ou x=1) et on a $x^2-8y^2=1$
$\Leftrightarrow \quad 8y^2=x^2-1$
$8=2^3$ donc $x^2-1=y^2\times 2^3$ (a=y et b=2) donc x^2-1 est un nombre puissant.
<u>Conclusion</u>
x^2-1 et x^2 sont des nombres consécutifs puissants.
Pour x=1 on obtient $x^2-1=0$ et $x^2=1$.

4. Il y a une infinité de couples solutions de l'équation (E), il y a donc une infinité de couples d'entiers consécutifs puissants.
Les premiers couples solutions de (E) sont (1;0) ; (3;1) ; (17;6) ; (99;35) . . .
$99^2=9801$ et $99^2-1=9800$
9800 et 9801 sont deux nombres consécutifs puissants supérieurs à 2018.