Exercice 1 *4 points*

Une étude statistique a été menée dans une grande ville de France entre le 1^{er} janvier 2000 et le 1^{er} janvier 2010 afin d'évaluer la proportion des ménages possédant une connexion internet fixe.
Au 1^{er} janvier 2010, un ménage sur huit était équipé d'une connexion internet fixe et au 1^{er} janvier 2010 64 % des ménages l'étaient.
Suite à cette étude, cette proportion a été modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(t)=\frac{1}{1+k e^{-at}}$$

où k et a sont deux constantes réelles positives et la variable t désigne le temps, compté en années, écoulé depuis le 1^{er} janvier 2000.

1. Déterminer les valeurs exactes de k et de a pour que $g(0)=\frac{1}{8}$ et $g(10)=\frac{64}{100}$.

2. Dans la suite , on prendra $k=7$ et $a=0{,}25$. La fonction g est donc définie par :

$$g(t)=\frac{1}{1+7e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}}$$

2.a. Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2.b. Selon cette modélisation, peut-on affirmer qu'un jour, au moins 99 % des ménages de cette ville seront équipés d'une connexion internet fixe ? Justifier la réponse.

3.a. Donner au centième près, la proportion de foyers, prévue par le modèle, équipés d'une connexion internet fixe au 1^{er} janvier 2018.
3.b. Compte tenu du développement de la téléphonie mobile, certains statisticiens pensent que la modélisation par la fonction g de l'évolution de la proportion de ménages possédant une connexion internet fixe doit être remise en cause.
Au début de l'année 2018 un sondage a été effectué. Sur 1000 foyers, 880 étaient équipés d'une connexion fixe.
Ce sondage donne-t-il raison à ces statisticiens sceptiques ?
(On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.)

CORRECTION

Pour tout nombre t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(t)=\dfrac{1}{1+k\,e^{-at}}$

1. $g(0)=\dfrac{1}{1+k\,e^{0}}=\dfrac{1}{1+k}$

$g(0)=\dfrac{1}{8} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{1+k}=\dfrac{1}{8} \quad\Leftrightarrow\quad 1+k=8 \quad\Leftrightarrow\quad k=7$

. $g(10)=\dfrac{1}{1+7e^{-10a}}$

$g(10)=\dfrac{64}{100} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{1+7e^{-10a}}=\dfrac{64}{100} \quad\Leftrightarrow\quad 1+7e^{-10a}=\dfrac{100}{64}=\dfrac{25}{16} \quad\Leftrightarrow\quad 7e^{-10a}=\dfrac{25}{16}-1=\dfrac{9}{16}$

$\Leftrightarrow\quad e^{-10a}=\dfrac{9}{7\times16} \quad\Leftrightarrow\quad -10a=\ln\left(\dfrac{9}{7\times16}\right) \quad\Leftrightarrow\quad a=-\dfrac{1}{10}\times\ln\left(\dfrac{1}{7\times16}\right)$.

<u>Remarque</u>

En utilisant la calculatrice on obtient : $a=0{,}25$ à 10^{-2} près.

2. $k=7 \qquad a=0{,}25=\dfrac{1}{4} \qquad$ donc $\qquad g(t)=\dfrac{1}{1+7e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}}$

2.a. $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2} \qquad (e^u)'=u'e^u \qquad \left(e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}\right)'=-\dfrac{1}{4}e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}$

$v(t)=1+7e^{-\left(\frac{t}{4}\right)} \qquad v'(t)=-7\times0{,}25\,e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}$

Pour tout nombre t de l'intervalle $[0:+\infty[$ **:**

$v'(t)<0$ donc $-v'(t)>0$ et $\dfrac{-v'(t)}{(v(t))^2}>0$ soit $g'(t)>0$

g est croissante sur $[0;+\infty[$ **.**

2.b. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{t}{4}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty}e^T=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}=0$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\dfrac{1}{1+0}=1$ et g est croissante $[0;+\infty[$ donc pour t « assez grand » g(t) sera supérieur à 0,99.

On peut donc affirmer qu'un jour, au moins 99 % des ménages seront équipés d'une connexion internet fixe.

3.a. La proportion de foyers équipés d'une connexion internet fixe, prévue par la modélisation, au 1er janvier 2018 est $g(18)=\dfrac{1}{1+7e^{-\frac{18}{4}}}$ $\qquad g(18)=\dfrac{1}{1+7e^{-4,5}}=0{,}93$ à 10^{-2} près.

3.b. La proportion de foyers possédant une connexion internet fixe, selon la modélisation est p = 0,93.

La taille de l'échantillon est n = 1000.

$n\geqslant30 \qquad np=930\geqslant5 \qquad n(1-p)=70\geqslant5$

On donne l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %:

$$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}};p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}}\right]=\left[0{,}93-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}93\times0{,}07}{1000}};0{,}93+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}93\times0{,}07}{1000}}\right]$$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}93\times0{,}07}{1000}}=0{,}02$ à 10^{-2} près.

I=[0,91;0,95].

La fréquence obtenue dans le sondage est : $f=\dfrac{880}{1000}=0{,}88$. .

0,88 n'appartient pas à I et 0,88 < 0,91 donc **au seuil de 95 %, ce sondage donne raison aux statisticiens sceptiques.**