Exercice 1 — 4 points

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point,une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 36.

On a alors à 10^{-3} près :

a. $P(X \leqslant 81{,}2)=0{,}542$ **b.** $P(X \leqslant 81{,}2)=0{,}301$

c. $P(81{,}2 \leqslant X \leqslant 103{,}8)=0{,}542$ **d.** $P(81{,}2 \leqslant X \leqslant 103{,}8)=0{,}301$

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2.

Une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite. On a alors :

a. $P(X>52)=\dfrac{1-P(-2<N<2)}{2}$ **b.** $P(X>52)=1-P(-2<N<2)$

c. $P(X>52)=\dfrac{1-P(-1<N<1)}{2}$ **d.** $P(X>52)=1-P(-1<N<1)$

3. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T>2)=0{,}5$.
Une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P_{(T>2)}(T>5)$ est égale à :

a. 0,35 **b.** 0,54

c. 0,53 **d.** $\dfrac{e}{2}$

4. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.
On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne.
On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées.
On note E(X) l'espérance de X. On a alors :

a. $E(X)=3$ **b.** $\dfrac{3}{8}$

c. $P(X \geqslant 1)=0{,}905$ à 10^{-3} près **d.** $P(X \geqslant 1)=0{,}095$ à 10^{-3} près

CORRECTION

1. **Réponse : b** $P(X\leqslant 81{,}2)=0{,}301$

Justification non demandée

Il suffit d'utiliser la calculatrice.

2. **Réponse : c** $P(X>52)=\dfrac{1-P(-1<N<1)}{2}$

Justification non demandée

X est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2 donc $N=\dfrac{X-50}{2}$ suit la loi normale centrée réduite.

$P(X>52)=P(N>1)$

$P(N>1)=P(N<-1)$

$P(N<-1)+P(-1<N<1)+P(1<N)=1$

donc $P(N>1)=\dfrac{1-P(-1<N<1)}{2}$

3. **Réponse : a** 0,35

Justification non demandée

T suit une loi exponentielle donc une loi de probabilité sans vieillissement.

Donc $P_{(T>2)}(T>5)=P(T>5-2)=P(T>3)$.

- première méthode : (sans calcul)

  $2\leqslant 3$ donc $P(T>2)\geqslant P(T>3)$

  $P(T>2)=0{,}5$ conséquence : $P(T>3)$ est inférieur ou égal à 0,5.

  Or 0,54, 0,53 et $\dfrac{e}{2}$ sont supérieur à 0,5. La seule réponse possible est 0,35.

- deuxième méthode : (avec calcul)

  T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

  $$P(T\leqslant 2) = \int_0^2 \lambda e^{-\lambda t}dt = [-e^{-\lambda t}]_0^2 = 1-e^{-2\lambda}.$$

  $$P(T>2)=e^{-2\lambda}=0{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad -2\lambda=\ln(0{,}5)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2) \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{\ln(2)}{2}$$

  $P(T>3)=e^{-\frac{3}{2}\ln(2)}=0{,}35$ à 10^{-2} près.

4. **Réponse : c** $P(X\geqslant 1)=0{,}905$ à 10^{-3} près

Justification non demandée

X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\dfrac{3}{8}$.

$E(X)=np=\dfrac{15}{8}$

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$

$P(X=0)=\left[\dfrac{3}{8}\right)^5=0{,}095$ à 10^{-3} près

P(X>=1)=1-0,095=0,905 à 10^{-3} près