Exercice 2   5 points

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

On pose : $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

1. Donnez la forme algébrique de Z.

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3. Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

4. En déduire que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5. On admet que :

. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

. Pour tous nombres réels a et b, $\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$

Résoudre l'équation suivante dans l'enseble des nombres réels $\mathbb{R}$.

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos(x) - (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin(x) = -2\sqrt{3}$

CORRECTION

1. $z_1=1-i$ et $z_2=-8-8\sqrt{3}i$

$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i}{-8-8\sqrt{3}i}=\frac{(1-i)(-8+8\sqrt{3}i)}{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = \frac{-8+8\sqrt{3}+i(8+8\sqrt{3})}{64+3\times 64}=\frac{8(-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))}{8\times 32}$

$Z=\frac{-1+\sqrt{3}}{32}+i\frac{1+\sqrt{3}}{32}$

2. $z_1=1-i \qquad |z_1|^2=1^2+(-1)^2=2 \qquad |z_1|=\sqrt{2}$

$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos(\theta_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta_1)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta_1\equiv-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$\arg(z_1)=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$z_1=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

. $z_2=-8-8\sqrt{3}i \qquad |z_2|^2=(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2=64+3\times 64=256=16^2 \qquad |z_2|=16$

$z_2=16\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos(\theta_2)=-\frac{1}{2}$ et $\qquad \theta\equiv-\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\theta_2\equiv-\frac{2\pi}{2}\ (2\pi)$

$\arg(z_2)=-\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$z_2=16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

3. $Z=\frac{z_1}{z_2} \qquad |Z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{2}}{16}$

$\arg(Z)=\arg(z_1)-\arg(z_2)\ (2\pi)$

$\arg(Z)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\arg(Z)=\frac{8\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\ (2\pi)$

$\arg(Z)=\frac{5\pi}{12}\ (2\pi)$

$Z=\frac{\sqrt{2}}{16}e^{i\frac{5\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

4. La partie réelle de Z est égale à :

$\frac{\sqrt{2}}{16}\times\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{32}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{16}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{32}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos(x)-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin(x)=-2\sqrt{3}$

On divise les deux membre de cette équation, pour diviser un produit par 4 on divise un seul de ses facteurs par 4.

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cos(x)-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\sin(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et en utilisant la formule d'addition donnée dans l'énoncé, on obtient.

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \{x+\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x+\frac{5\pi}{12}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\}$

$\Leftrightarrow \quad \{x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\}$

$S=\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{12}+2k\pi \mid k \text{ appartient à } Z\}$

