Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit (u_n) définie par $u_0=14$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=2u_n-5$.

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_n=u_n-5$.

Affirmation A : La suite (u_n) est une suite géométrique.

Affirmation B : Pour tout entier naturel n, $u_n=9\times 2^n+5$.

2. Soit une suite (v_n).

Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1, $-1-\frac{1}{n}\leqslant v_n\leqslant 1+\frac{1}{n}$ alors la suite (v_n) converge.

3. Affirmation D : $(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3)=n(4n+7)$

4. Soit (w_n) une suite convergente.

Affirmation E : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont stictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.

CORRECTION

1. (u_n) est la suite définie par : $u_0=14$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=2u_n-5$.

(t_n) est la suite définie par : Pour tout entier naturel n, $t_{n+1}=u_n-5$

Affirmation A : **VRAIE**

Justification

Pour tout entier naturel n :

$t_{n+1}=u_{n+1}-5=2u_n-5-5=2u_n-10=2(u_n-5)=2t_n$.

Donc la suite (t_n) est la suite géométrique de premier terme $t_0=u_0-5=14-5=9$ et de raison $q=2$.

Affirmation B : **VRAIE**

Justification

Pour tout entier naturel n :

$t_n=t_0\times q^n=9\times 2^n$

$t_n=u_n-5 \quad \Leftrightarrow \quad u_n=t_n+5$

$u_n=9\times 2^n+5$

2. **Affirmation C :** **FAUSSE**

Justification

Pour tout entier naturel n :

$-\frac{1}{n}-1\leqslant v_n\leqslant 1+\frac{1}{n}$

Il existe des suites non convergentes vérifiant cette propriété.

Exemple

Pour tout entier naturel n :

$v_n=\cos(n\pi)=(-1)^n$

Si n est pair alors $v_n=1$ et si n est impair alors $v_n=-1$.

Cette suite n'est pas convergente.

3. **Affirmation D :** **VRAIE**

Justification

Première méthode : (raisonnement par récurrence)

On veut démontrer en ntlisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3)=n(4n+7)$

Initialisation

Pour n=1, $8\times 1+3=8+3=11$ et $1\times(4\times 1+7)=4+7=11$.

La propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que :

$(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3)=n(4n+7)$ et on doit démontrer que :

$(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3)+(8\times(n+1)+3)=(n+1)(4(n+1)+7)$

Or $(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3)+(8\times(n+1)+3)=n(4n+7)+(8(n+1)+3)$

$= n^2+7n+8n+11=n^2+15n+11$.

Et $(n+1)(4(n+1)+7)=(n+1)(4n+11)=4n^2+11n+4n+11=n^2+15n+11$.

Donc la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n :

$(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3)=n(4n+7)$.

Deuxième méthode (suite arithmétique)

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $a_n=8\times n+3$.

Pour tout entier naturel non nul n :

$a_{n+1}=8\times(n+1)+3=8\times n+8+3=a_n+8$

donc (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_1=8\times 1+3=11$ et de raison r=8.

$(8\times1+3)+(8\times2+3)+\ldots+(8\times n+3)=a_1+a_2+\ldots+a_n$ est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique. Cette somme est égale à :

$$\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}\times(\text{nombre de termes})=\frac{11+8n+3}{2}\times n=(7+4n)n$$

= n(4n+7).

4. (w_n) est une suite convergente

Affirmation E : **FAUSSE**

Justification

Il suffit de considérer la suite (w_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, $w_n=\frac{1}{n}$.

$w_n>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$.