Exercice 4 6 points

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $g(x)=-2x^3+x^2-1$.

1.a. Étudier les variations de la fonction g.

1.b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α et que α appartient à [-1;0].

3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x : $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$.

2.a. Démontrer que, pour tout x > 1, $1<x<x^2<x^3$.

2.b. En déduire que pour x > 1, $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$

2.c. On admet que, pour tout entier naturel n, $\lim_{X \to +\infty} X^n e^{-X}=0$

Vérifier que pour tout réel x, $4x^3e^{-2x+1}=\frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}$ puis montrer que $\lim_{x \to +\infty} 4x^3e^{-2x+1}=0$.

2.d. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=(-2x^3+x^2-1)e^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x : $g(x)=-2x^3+x^2+1$.

1.a. g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x)=-6x^2+2x=2x(-3x+1)$.

Le signe de $g'(x)$ est le signe d'un trinôme dont les racines sont 0 et $\frac{1}{3}$ et dont le coefficient de x^2 est négatif.

On donne les variations de g sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	-	
g(x)		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

1.b. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3)=-\infty$

2. On complète le tableau précédent pour obtenir le tableau de variation de g.

$g(0)=-1$ et $g\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{27}+\frac{1}{9}-1=\frac{1}{27}-1=-\frac{26}{27}<0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	-	
g(x)	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{26}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$ la fonction g admet un maximum strictement négatif donc il n'existe pas de solution à l'équation g(x)=0 appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et on a g(-1)= 2+1-1=2 >0 et g(o)= -1< 0, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α appartenant à [-1;0].

3. Sur $[0;+\infty[$ g(x) < 0 (le maximum de g sur cet intervalle est négatif).

Sur l'intervalle $[-\infty;0]$ g est strictement décroissante donc :

si $x<\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)=0$

si $\alpha< x \leqslant 0$ alors $g(\alpha)=0 > g(x)$.

On donne le signe de g sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

Partie B

Pour tout nombre réel x : $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+1)=+\infty$; $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x+x^2+x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

Pour la limite du produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2.a. Si $1<x$ alors $1\times x<x\times x$ soit $x<x^2$ et $x\times x<x^2\times x$ soit $x^2<x^3$

<u>Conséquence</u>

Si $1<x$ alors $1<x<x^2<x^3$

2.b. Si $1<x$ alors $1+x+x^2+x^3<4x^3$

$e^{-2x+1}>0$ donc $(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}<4x^3e^{-2x+1}$

<u>Conclusion</u>

Si $1<x$ alors $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$

2.c. $e^{-2x+1}=e^{-2x}\times e^1=e\times e^{2x}$

$\frac{e}{2}(2x)^3=\frac{e}{2}\times 8x^3=4ex^3$

$\frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}=4ex^3e^{-2x}=4x^3e^{-2x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X^3e^{-X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)^3e^{-2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}=0$

soit $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1}=0$.

2.d. Pour tout nombre réel $x>1$ $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1}=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Donc la droite d'équation y=0 est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$

3. $(1+x+x^2+x^3)'=1+2x+3x^2$

$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-2x+1})'=-2e^{-2x+1}$

$$f'(x)=(1+2x+3x^2)e^{-2x+1}+(1+x+x^2+x^3)(-2e^{-2x+1})=(1+2x+3x^2-2-2x-2x^2-2x^3)e^{-2x+1}$$

$$f'(x)=(-2x^3+x^2-1)e^{-2x+1}$$

4. Pour tout réel x, $e^{-2x+1}>0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)=-2x^3+x^2-1$.

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Compléments

. On peut déterminer une valeur approchée de α en utilisant un programme en Python (dichotomie).

Programme

```
print('Début de programme')
print("Veuillez entrer un entier naturel")   # pour la précision demandée
k=input()                                    # on saisit la valeur donnée
p=int(k)                                     # on précise que l'on a un entier naturel
a=-1                                         # borne inférieure de l'intervalle
b=0                                          # borne supérieure de l'intervalle
while(b-a>10**(-p)):
    c=(a+b)/2                                # centre de l'intervalle
    g=-2*c**3+c**2-1                         # image de c par g
    if g>0:
        a=c                                  # la fonction g est décroissante
    else:
        b=c
print(a," ",b)
print('Fin de programme')
```

Exécution pour p=2

```
Début de programme
Veuillez entrer un entier naturel
2
-0.6640625    -0.65625
Fin de programme
```

-0,66 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

. On peut déterminer une valeur approchée de $f(\alpha)$ en utilisant la calculatrice

4,97 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

. On donne une représentation graphique de la fonction f