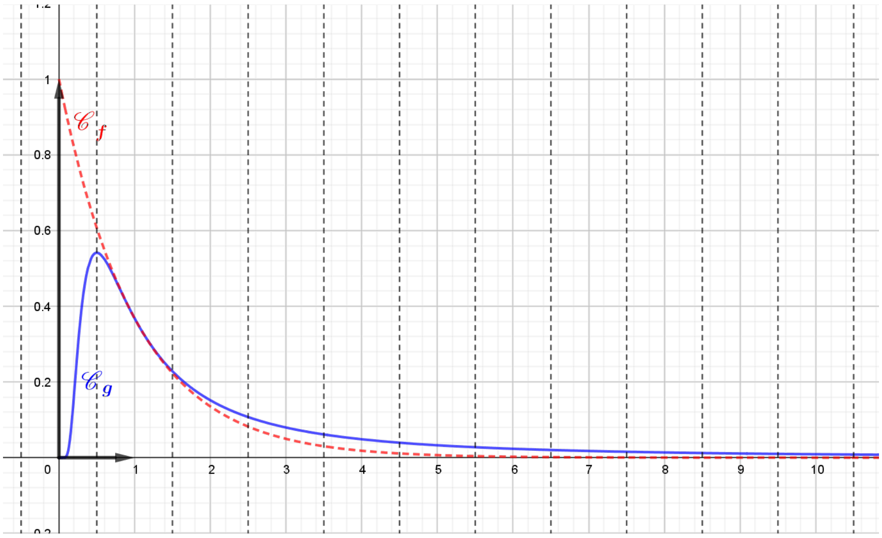
Exercice 1 — 6 points

Soient f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=e^{-x}$ et $g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

On admet que f et g sont dérivables sur $]0;+\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.
Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.



Partie A- Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x)=g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x)=0$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B- Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$.

2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0;+\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\ln(g(x))$.

2.a. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif,

$$h(x)=\frac{-1-2x\ln(x)}{x}.$$

2.b. Calculer la limite de h(x) quand x tend vers 0.

2.c. En déduire la limite de g(x) quand x tend vers 0.

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$g'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$$

4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$.

Partie C- Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. Démontrer que le point A de coordonnées $(1;e^{-1})$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle]0;1] et en dessous sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que :

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = e^{-a}+e^{-\frac{1}{a}}-e^{-b}-e^{-\frac{1}{b}}$$

3. Démontrer que :

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 (f(x)-g(x))\,dx = 1-2e^{-1}\ .$$

4. On admet que :

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 (f(x)-g(x))\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b (g(x)-f(x))\,dx$$

Interpréter graphiquement cette égalité.

CORRECTION

Partie A- Conjectures graphiques

1. Sur l'intervalle [0,8;1,5] les deux courbes semblent confondues sur le graphique.
Donc on choisit une valeur appartenant à ce intervalle : **1** est une solution de l'équation f(x)=g(x).

2. Au point d'abscisse 0,5 de la courbe $\mathscr{C}_g$, la tangente est horizontale donc **0,5** est une solution de l'équation $g'(x)=0$.

Partie B-Étude de la fonction g

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}=e^0=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Conséquence

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=$ **0.**

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $h(x)=\ln(g(x))$.

2.a. $h(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)=-\ln(x^2)-\frac{1}{x}=-2\ln(x)-\frac{1}{x}$

$h(x)=\frac{-1-2x\ln(x)}{x}$

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$\lim_{x\to0} x\ln(x)=0$ donc $\lim_{x\to0}(-1-2x\ln(x))=-1$

$\lim_{x\to0} -\frac{1}{x}=-\infty$

Conséquence

$\lim_{x\to0} h(x)=-\infty$

2.c. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$g(x)=e^{h(x)}$

$\lim_{x\to0} h(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{h(x)}=0$

or $g(x)=e^{h(x)}$ donc $\lim_{x\to0} g(x)=0$

3. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{-2x}{x^4}$ $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

$g'(x)=\frac{-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\times\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right)$

$g'(x)=\frac{(-2x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty]$

$x^4>0$ $e^{-\frac{1}{x}}>0$

Le signe de $g'(x)$ est le signe de (1-2x).

$1-2x\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1\leqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}=0{,}5\leqslant x$

On donne les variations de f en dressant son tableau de variation

x	0		0.5		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

$g(0{,}5)=4e^{-2}=0{,}54$ à 10^{-2} près.

Partie C- Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. $f(x)=e^{-x}$ $\quad f(1)=e^{-1}$ $\quad A(1;e^{-1})$ appartient à $\mathscr{C}_f$.

$g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad g(1)=\frac{1}{1}e-1=e^{-1}$ $\quad A(1;e^{-1})$ appartient à $\mathscr{C}_g$.

<u>Conséquence</u>

$A(1;e^{-1})$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. $f(x)-g(x)=e^{-x}-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

$F(x)=-e^{-x}$ F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

$G(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$ car $G'(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=g(x)$

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = F(b)-G(b)-F(a)+G(a)=-e^{-b}-e^{-\frac{1}{b}}+e^{-a}+e^{-\frac{1}{a}}$$

3. $$\int_a^1 (f(x)-g(x))\,dx = -e^{-1}-e^{-1}+e^{-a}+e^{-\frac{1}{a}}=-2e^{-1}+e^{-a}+e^{-\frac{1}{a}}$$

$\lim_{a\to 0} e^{-a}=e^0=1 \qquad \lim_{a\to 0}\left(-\frac{1}{a}\right)=-\infty \qquad \lim_{a\to 0} e^{-\frac{1}{a}}=0$

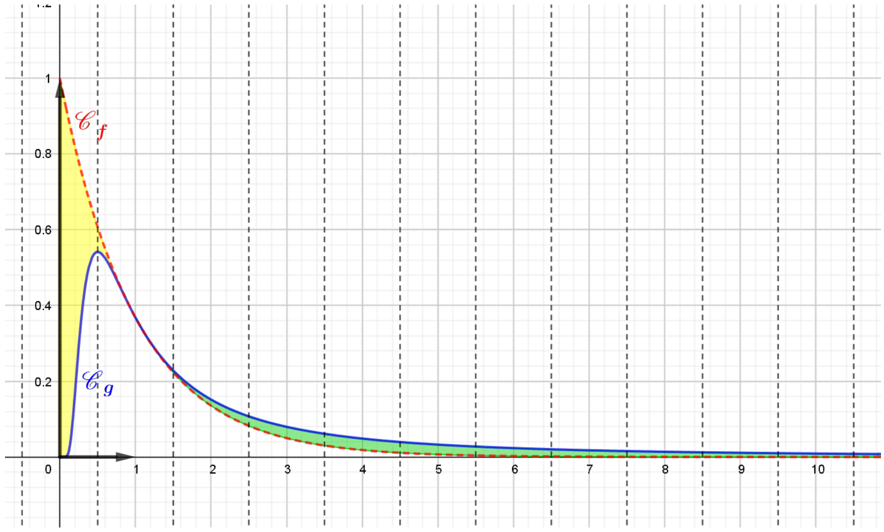
$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 (f(x)-g(x))\,dx=1-2e^{-1}$$

4. Si a est un réel tel que $0<a\leqslant 1$ alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle [a;1], donc l'intégrale $\int_a^1 (f(x)-g(x))\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre les deux courbes sur [a;1].

$\lim_{a\to 0}\int_a^1 (f(x)-g(x))\,dx$ est donc l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre les deux courbes sur]0;1] (domaine coloré en jaune sur la figure).

Si b est réel tel que $1\leqslant b$ alors $\mathscr{C}_g$ est au dessus $\mathscr{C}_f$ sur $[1;+\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^b (f(x)-g(x))\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre les deux courbes sur [1;b].

$\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b (g(x)-f(x))\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre les deux courbes sur $[1;+\infty[$ (domaine coloré en vert sur la figure).



. L'égalité admise nous permet d'affirmer que les deux aires sont égales.

