

Exercice 2
3 points

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si la réponse est fausse.

On considère trois candidats :

- . Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions ;

Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité correctement est égale à $\frac{1}{4}$.

- . Barbara est un peu mieux préparée. On considère que chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est $\frac{1}{2}$;

- . Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$

1. On note X , Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

1.a. Quelle est la loi de probabilité aléatoire X ? Justifier.

1.b. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) = 0,588$ et $P(Z \geq 10) = 0,962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.

On note A , B , C et M les événements :

- . A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- . B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- . C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
- . M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

On constate, après l'avoir corrigée, que la copie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara ?

On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

CORRECTION

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

Pour l'une quelconque des vingt questions

Succès S : « Anselme répond correctement à la question et gagne un point »

La probabilité du succès est : $p = \frac{1}{4} = 0,25$

Échec \bar{S} : « Anselme ne répond pas correctement à la question et ne gagne pas de point »

La probabilité de l'échec est : $q = \frac{3}{4} = 0,75$

• Anselme répond complètement au hasard aux 20 questions.

Donc les vingt épreuves sont indépendantes et la loi de probabilité X égale au nombre de succès en 20 épreuves est la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,25$.

1.b. En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X \geq 10) = \mathbf{0,014}$

2. On nous demande de calculer $P_M(B)$.

On choisit au hasard l'un des trois candidats donc :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

On connaît aussi :

$$P_A(M) = 0,014 \quad P_B(M) = 0,588 \quad P_C(M) = 0,962$$

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M) = P(A) \times P_A(M) + P(B) \times P_B(M) + P(C) \times P_C(M)$$

$$P(M) = \frac{1}{3} \times 0,014 + \frac{1}{3} \times 0,588 + \frac{1}{3} \times 0,962 = \frac{1,564}{3} = \mathbf{0,521 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

$$P_M(B) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)}$$

$$P(M \cap C) = 0,588 \times \frac{1}{3} = 0,196$$

$$P_M(B) = \frac{0,196}{0,521} = \mathbf{0,376}$$