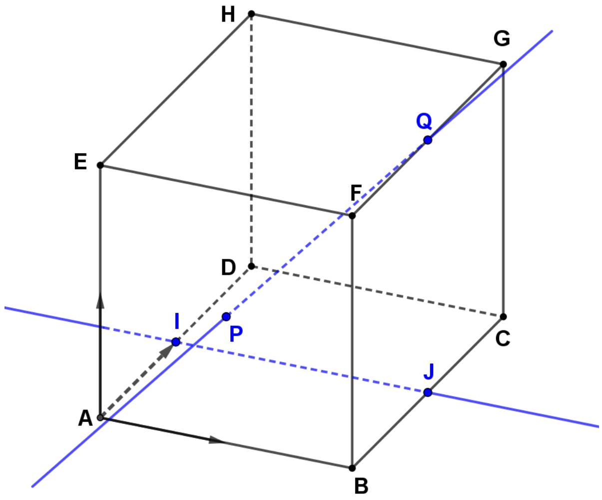
Exercice 3 — 6 points

Soit ABCDEFGH le cube représenté ci-dessous.
On considère :
- I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC] ;
- P le centre de la face ABFE, c'est à dire l'intersection des diagonales (AF) et (BE) ;
- Q le milieu du segment [FG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB};\frac{1}{2}\overrightarrow{AD};\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser les coordonnées des points de la figure sans les justifier.

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}$

1. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Soient t un nombre réel et $M(1+t;t;1+t)$ le point de la droite (PQ) de paramètre t.

2.a. On admet qu'il existe un unique point K appartenant à la droite (IJ) tel que (MK) soit orthogonale à (IJ). Démontrer que les coordonnées de ce point K sont $(1+t;1;0)$.

2.b. En déduire que $MK = \sqrt{2+2t^2}$.

3.a. Vérifier que $y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (HGB).

3.b. On admet qu'il existe un unique point L appartenant au plan (HGB) tel que (ML) soit orthogonale à (HGB).

Vérifier que les coordonnées de ce point L sont $\left(1+t;\frac{1}{2}+t;\frac{1}{2}+t\right)$.

3.c. En déduire que la distance ML est indépendante de t.

4. Existe-t-il une valeur de t pour laquelle la distance MK est égale à la distance ML ?

CORRECTION

On détermine les coordonnées de tous les sommets du cube.

A(0;0;0) B(2;0;0) C(2;2;0) D(0;2;0) E(0;0;2) F(2;0;2) G(2;2;2) H(0;2;2)

1. P est le milieu de [AF] P(1;0;1)

Q est le milieu de [FG] Q(2;1;2)

(PQ) est la droite passant par P(1;0;1) et de vecteur directeur $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (PQ) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

2.a. En utilisant la représentation paramétrique de (IJ) donnée dans l'énoncé :

B appartient à (IJ) K(r;1;0) (r est est un nombre réel).

I est le milieu de [AD] I(0;1;0)

J est le milieu de [BC] J(2;1:0)

M(1+t;t;1+t)

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}r-1-t\\1-t\\-1-t\end{pmatrix}$

(MK) est orthogonale à (IJ) si et seulement si $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK}=0$.

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK}=0 \Leftrightarrow 2\times(r-1-t)+0+0=0 \Leftrightarrow r-1-t=0 \Leftrightarrow r=1+t$

K(1+t;1;0)

2.b. $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}0\\1-t\\-1-t\end{pmatrix}$ $MK^2=(1-t)^2+(1+t)^2=1-2t+t^2+1+2t+t^2=2+2t^2$

$MK=\sqrt{2+2t^2}$

3.a. Les points H, G et B ne sont pas alignés, pour démontrer que le plan (HGB) est le plan d'équation : y-z=0 il suffit de vérifier que les coordonnées des trois points sont solutions de l'équation y-z=0.

H(0:2;2) 2-2=0

G(2;2;2) 2-2=0

B(2;0;0) 0-0=0

Conclusion

y-z=0 est une équation cartésienne du plan (HGB).

Remarque

A(0;0;0) appartient aussi à ce plan.

3.b. Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HGB).

L(x;y;z) appartient au plan (HGB), or une équation cartésienne du plan (HGB) est y-z=0, donc L(x;y;y).

$\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}x-1-t\\y-t\\y-1-t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ML}$ est normal au plan (HGB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe a tel que $\overrightarrow{ML}=a\vec{N} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1-t=0 \\ y-t=a \\ y-1-t=-a \end{cases}$

On obtient x=1+t et en faisant la somme membre à membre des deux dernières équations 2y-1-2t=0

et $y=\frac{1}{2}t=z$

$L\left(1+t;\frac{1}{2}+t;\frac{1}{2}+t\right)$

3.c. $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $ML^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $ML=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (indépendant de t).

4. MK=ML $\Leftrightarrow$ $MK^2=ML^2$ $\Leftrightarrow$ $2+2t^2=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $4t^2+3=0$

Cette équation n'admet pas de solution

Conclusion

Il n'existe pas de point M tel que MK=ML.

