Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante :
$z_0=1$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\frac{1}{3}z_n+\frac{2}{3}i$.
On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n .
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=z_n-i$ et on note B_n le point d'affixe u_n .
On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que,pour tout entier naturel n, $u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)$.

3.a. Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n .
3.b. Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty}|z_n-i|=0$
3.c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4.a. Soit n un entier naturel, déterminer un argument de u_n .
4.b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les point B_n sont alignés.
4.c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation réduite :
$y=-x+1$.

CORRECTION

$z_0=1$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1}=\frac{1}{3}z_n+\frac{2}{3}i$.

Pour tout entier naturel n : $u_n=z_n-i$ donc $z_n=u_n+i$.

1. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=z_{n+1}-i=\frac{1}{3}z_n+\frac{2}{3}i-i=\frac{1}{3}z_n-\frac{1}{3}i=\frac{1}{3}(z_n-i)=\frac{1}{3}u_n$.

2. (u_n) est la suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=z_0-i=1-i$.

Pour tout entier naturel n :

$u_n=u_0\times q^n=(1-i)-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)$.

3.a. $|z_n|=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)\right|=\left(\frac{1}{3}\right)^n|1-i|$

$|1-i|^2=1^2+(-1)^2=2$ donc $|1-i|=\sqrt{2}$

Pour tout entier naturel n :

$|u_n|=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3.b. $0<\frac{1}{3}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

Conséquence

$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

or $z_n=u_n+i$ donc $\lim_{n\to+\infty}|z_n-i|=0$

3.c. On a $\lim_{n\to+\infty}z_n=i$

Le point A_n tend vers le point C lorsque n tend vers $+\infty$.

4.a. $z_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On note $\arg(z_n)=\theta\ (2\pi)$

$\cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Conséquence

$\arg(z_n)=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

4.b. Soit E(1-i) $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$(\vec{u};\overrightarrow{OE})=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Pour tout entier naturel n, $(\vec{u};\overrightarrow{OB_n})=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OB_n}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires donc les points O, B_n et E sont alignés.

Conclusion

Tous les points B_n appartiennent à la droite (OE), ils sont donc alignés.

4.c. $B_n(u_n)$ $u_n=X_n+iY_n$ X_n et Y_n sont des nombres réels.

$X_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $Y_n=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $Y_n=-X_n$

$A_n(z_n)$ $z_n = x_n + i\,y_n$ x_n et y_n sont des nombres réels.

$u_n = z_n - i \Leftrightarrow z_n = u_n + i \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = X_n \\ y_n = Y_n + 1 \end{cases}$

$Y_n = -X_n \Leftrightarrow y_n - 1 = -x_n \Leftrightarrow y_n = -x_n + 1$

<u>Conclusion</u>

Le point A_n appartient à la droite d'équation $y = -x + 1$.