Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.
On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

1.a. Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à u_{10} .
1.b. Que peut-on conjecturer sur le PGCD de u_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n=u_n^2-u_{n+1}\times u_{n-1}$, pour tout entier naturel n non nul.
2.a. Démontrer que, pour tout entier n non nul, $v_{n+1}=-v_n$.
2.b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul.
$u_n^2-u_{n+1}\times u_{n-1}=(-1)^{n-1}$.
2.c. Démontrer alors la conjecture émise à la question **1.b.**

Partie B

On considère la matrice $F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

1. Calculer F^2 et F^3 . On pourra utiliser la calculatrice.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $F^n=\begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}$

3.a. Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2}=F^{n+2}\times F^n$, démontrer que :
$u_{2n+2}=u_{n+2}\times u_{n-1}+u_{n-1}\times u_n$
3.b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,
$u_{2n+2}=u_{n+2}^2-u_n^2$.

4. On donne $u_{12}=144$.
Démontrer en utilisant la question **3.** qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.
Donner la longueur des deux autres côtés.

CORRECTION

Partie A

1.a. On donne les résultats sous la forme d'un tableau.

n	u_n
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

1.b. Pour les 11 premières valeurs de u_n , on constate que le PGCD de termes consécutifs est égal à 1. On peut conjecturer, que le résultat est vérifié en général c'est à dire que deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux.

2. Pour tout entier naturel n, non nul : $v_n = u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1}$.

2.a. Pour tout entier naturel n, non nul,

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n+2} \times u_n$

On a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ donc

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - (u_{n+1} + u_n) \times u_n = u_{n+1}^2 - u_{n+1} \times u_n - u_n^2 = u_{n+1} \times (u_{n+1} - u_n) - u_n^2$

On a $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ donc $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$ et

$v_{n+1} = u_{n+1} \times u_{n-1} - u_n^2 = -(u_n - u_{n+1} \times u_{n-1}) = -v_n$

2.b. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_1 = u_1^2 - u_2 \times u_0 = 1^2 - 1 \times 0 = 1$ et de raison $q = -1$.

Pour tout entier naturel n, non nul

$v_n = v_1 \times 1 \times (-1)^{n-1} = 1 \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

donc $u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1} = (-1)^{n-1}$

2.c. Pour tout entier naturel non nul n :

Si n est impair alors $(u_n) \times u_n - (u_{n-1}) \times u_{n+1} = 1$

u_n et u_{n-1} sont des nombres entiers donc le théorème de Bezout nous permet d'affirmer que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux et que leur PGCD est égal à 1.

Si n est pair alors $-(u_n) \times u_n + (u_{n-1}) \times u_{n+1} = 1$ donc u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

Partie B

1. $F^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $F^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$

<u>Initialisation</u>

Pour n=1 $u_n=u_1=1$ $u_{n+1}=u_2=1$ $u_{n-1}=u_0=0$ et $F^1=F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

donc la propriété est vérifiées pour n=1.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul, on suppose que :

$F^n=\begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}$ et on doit démontrer que $F^{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+2} & u_{n+1}\\ u_{n+1} & u_n\end{pmatrix}$

$F^{n+1}=F^n\times F^1=\begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}+u_n & u_{n+1}\\ u_n+u_{n-1} & u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+2} & u_{n+1}\\ u_{n+1} & u_n\end{pmatrix}$

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n non nul que :

$F^n=\begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}$

3.a. Pour tout entier naturel n non nul, $F^{2n+2}=F^{n+2}\times F^n$

$F^{2n+2}=\begin{pmatrix}u_{2n+3} & u_{2n+2}\\ u_{2n+2} & u_{2n+1}\end{pmatrix}$ $F^{n+2}=\begin{pmatrix}u_{n+3} & u_{n+2}\\ u_{n+2} & u_{n+1}\end{pmatrix}$ $F^n=\begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}$

On calcule le coefficient de la première colonne et de la deuxième ligne de la matrice en multipliant les deux autres matrices.

$u_{2n+2}=u_{n+2}\times u_{n+1}+u_{n+1}\times u_n$

3.b. $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ donc $u_{n+1}=u_{n+2}-u_n$

On obtient $u_{2n+2}=u_{n+2}\times(u_{n+2}-u_n)+u_{n+1}\times u_n=u_{n+2}^2-u_{n+2}\times u_n+u_{n+1}\times u_n=u_{n+2}^2-u_n\times(u_{n+2}-u_{n+1})$

$u_{2n+2}=u_{n+2}^2-u_n^2$

3.c. $12=2\times 5+2$ donc $u_{2\times 5+2}=u_{5+2}^2-u_5^2$ soit $u_{12}=u_7^2-u_5^2$

$u_{12}=144=12^2$ $u_7=13$ $u_5=5$

$12^2=13^2-5^2 \Leftrightarrow 13^2=12^2+5^2$

La réciproque du théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le triangle dans la longueur des côtés est 5, 12 et 13 est rectangle l''hypoténuse est le côté de longueur 13.