

Exercice 1

5 points

Rappel de connaissances :

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donné par la formule

$$\left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

où n désigne la taille de l'échantillon et p la proportion des individus possédant le caractère étudié dans cette population. Les conditions de validité de cet intervalle sont les suivantes : $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$.

La municipalité d'une grande ville dispose d'un stock de DVD qu'elle propose en location aux usagers des différentes médiathèques de cette ville.

Afin de renouveler son offre de location, la municipalité décide de retirer des DVD de son stock.

Parmi les DVD retirés, certains sont défectueux, d'autres non.

Parmi les 6 % de DVD défectueux sur l'ensemble du stock, 98 % sont retirés.

On admet par ailleurs que parmi les DVD non défectueux, 92 % sont maintenus dans le stock, les autres sont retirés.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

On choisit un DVD au hasard dans le stock de la municipalité.

On considère les événements suivants :

- . D : « le DVD est défectueux » ;
- . R : « le DVD est retiré du stock ».

On note \bar{D} et \bar{R} les événements contraires respectifs des événements D et R.

1. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,134.
2. Une association caritative contacte la municipalité dans l'objectif de récupérer l'ensemble des DVD qui sont retirés du stock. Un responsable de la ville affirme alors que parmi ces DVD retirés, plus de la moitié est composée de DVD défectueux.
Cette affirmation est-elle vraie ?

Partie B

Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise.

Sur cet échantillon on détecte 14 DVD défectueux.

Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux ?

Partie C

Une partie du stock de DVD de la ville est constituée de DVD de films d'animation destinés au jeune public. On choisit un film d'animation au hasard et on note X la variable aléatoire qui donne la durée, en minutes, de ce film, X suit la loi normale d'espérance $\mu = 80$ min et d'écart-type σ .

De plus, on estime que $P(X \geq 92) = 0,10$.

1. Déterminer le réel σ et en donner une valeur approchée à 0,01.
2. Un enfant regarde un film d'animation dont il ne connaît pas la durée. Sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie, quelle est la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent ?

CORRECTION

Partie A

L'énoncé précise :

- Parmi les 6 % de DVD non défectueux, 98 % sont retirés donc 2 % ne sont pas retirés.

Conséquences

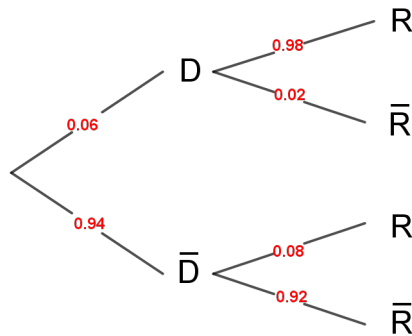
$$P(D)=0,06 ; P_D(R)=0,98 ; P_D(\bar{R})=0,02 \text{ et } P(\bar{D})=1-P(D)=0,94 .$$

- Parmi les DVD défectueux, 92 % sont maintenus dans le stock, les autres sont retirés donc 8 % sont retirés.

Conséquences

$$P_{\bar{D}}(\bar{R})=0,92 \text{ et } P_{\bar{D}}(R)=0,08 .$$

- On donne les résultats sous la forme d'un arbre pondéré :



1. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :

$$P(R)=P(D \cap R)+P(\bar{D} \cap R)=P(D) \times P_D(R)+P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(R) = 0,06 \times 0,98+0,94 \times 0,08=0,0588+0,0752$$

$$P(R)=0,134.$$

2. On détermine $P_R(D)$

$$P_R(D)=\frac{P(R \cap D)}{P(R)}=\frac{0,0588}{0,134}=0,4388 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Conclusion

L'affirmation du responsable de la ville est FAUSSE.

Partie B

$$n=150 \geq 30 ; p=0,06 ; np=150 \times 0,06=9 \geq 5 \text{ et } n(1-p)=150 \times 0,94=141 \geq 5$$

donc l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion des DVD défectueux, au seuil de 95 % dans un échantillon de taille 150 est :

$$I=\left[0,06-1,96 \times \sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}; 0,06+1,96 \times \sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}\right]$$

En utilisant la calculatrice :

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}=0,0380 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$I=[0,06-0,038; 0,06+0,038]=[0,022; 0,098]$$

La proportion de DVD défectueux dans l'échantillon est : $f=\frac{14}{150}=0,093 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$

Conclusion

On ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque 6 % des DVD sont défectueux avec un risque d'erreur de 5 %.

Partie C

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu=80$ et d'écart-type σ donc la variable

aléatoire $Y = \frac{X-80}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$X \geq 92 \Leftrightarrow Y \geq \frac{12}{\sigma}$$

$$P(X \geq 92) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(Y \geq \frac{12}{\sigma}\right) = 0,1$$

En utilisant la calculatrice, on détermine a tel que $P(Y \geq a) = 0,1$.

On obtient $a = 1,2816$.

$$\frac{12}{\sigma} = 1,2816 \Leftrightarrow \sigma = \frac{12}{1,2816} = \mathbf{9,36 \text{ à } 0,01 \text{ près.}}$$

2. Une heure et demie est égale à 90 min.

On nous demande de calculer $P_{(X \geq 90)}(X \leq 95)$

$$P_{(X \geq 90)}(X \leq 95) = \frac{P(90 \leq X \leq 95)}{P(X \geq 90)}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$P_{(X \geq 90)}(X \leq 95) = \frac{0,0882}{0,1427} = \mathbf{0,62 \text{ à } 0,01 \text{ près.}}$$