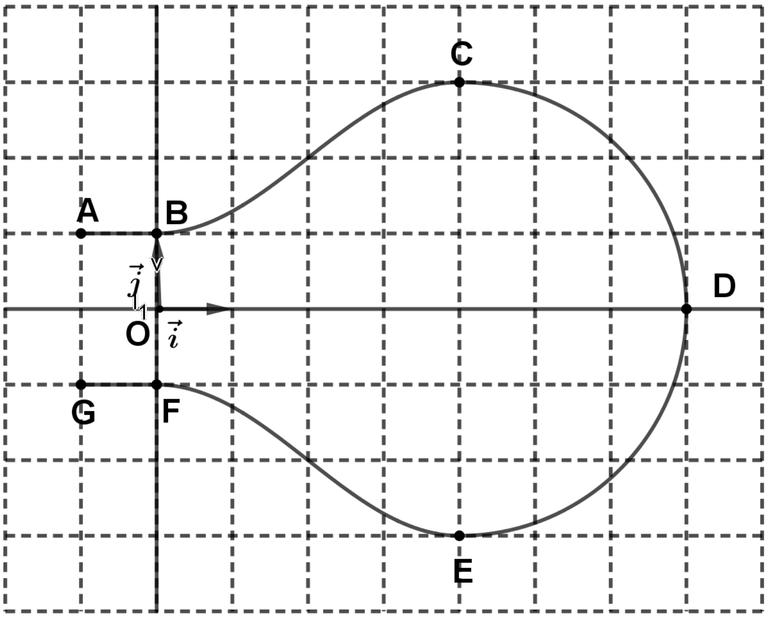
Exercice 2 — 6 points

Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

Partie A – Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On considère les points A(-1;1) ; B(0;1) ; C(4;3) ; D(7;0) ; E(4;-3) ; F(0;-1) et G(-1;-1).
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- La portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle [-1;0] par h(x)=1 ;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle [0;4] par $f(x)=a+b\sin\left(c+\frac{\pi}{4}x\right)$ où a, b et c sont des nombres réels non nuls fixés et où le nombre réel c appartient à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

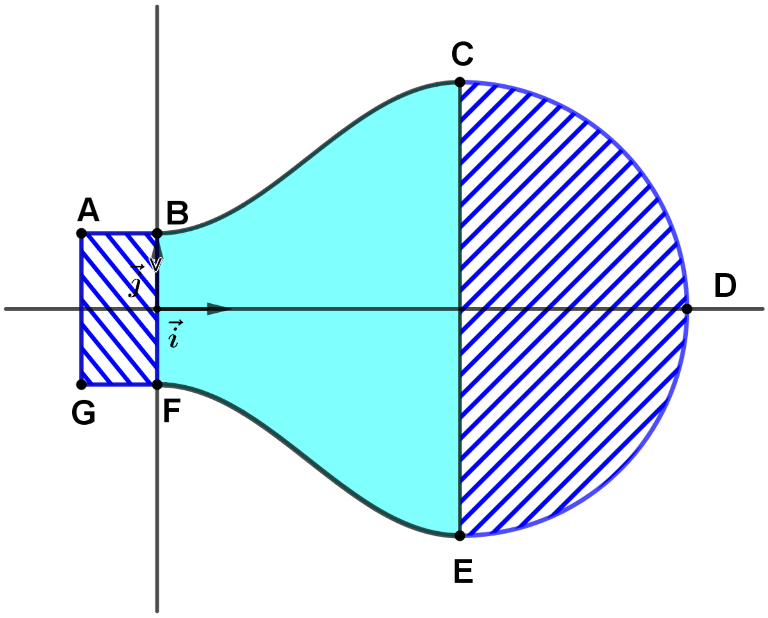
1. a. On appelle f' la fonction dérivée de f.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;4], déterminer $f'(x)$.

1.b. On impose aux tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du nombre réel c.

2. Déterminer les nombres réels a et b.

Partie B – Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule.
Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-après :



Vue dans le plan (BCE)

On rappelle que :

- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où r est le rayon du disque de base et h est la hauteur.
- le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.

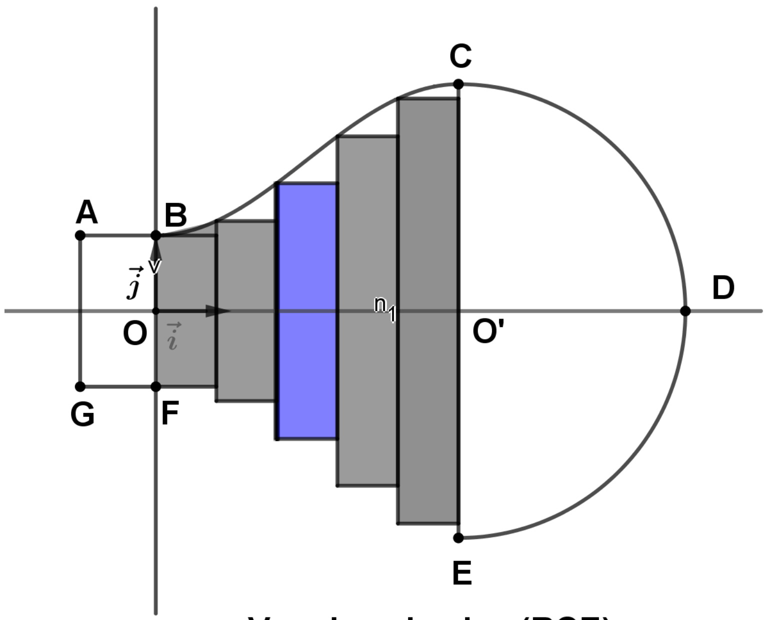
On admet également que pour tout réel x de l'intervalle [0;4], $f(x)=2-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

1. Calculer le volume du cylindre de section ABFG.

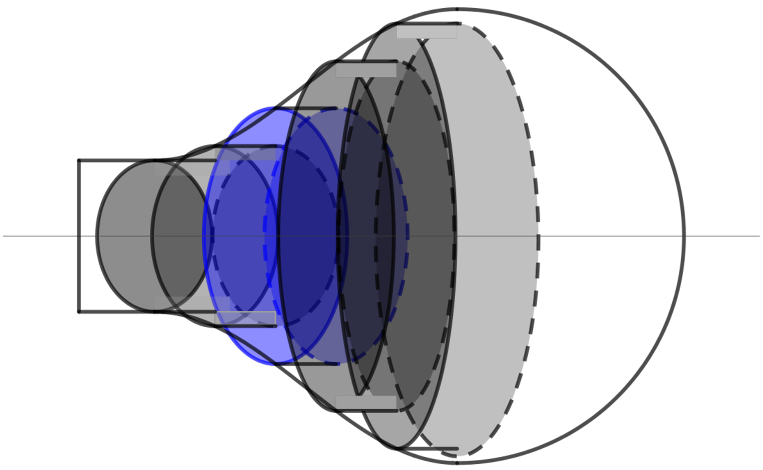
2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi-disque de diamètre [CE].

3. Pour approcher le volume du solide de section la zone colorée BCEF, on partage le segment [OO'] en n segments de même longueur $\frac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.

2.a. Cas particulier : dans cette question uniquement on choisit n=5.
Calculer le volume du troisième cylindre coloré en bleu sur les figure ci-après puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2} .



Vue dans le plan (BCE)



Vue dans l'espace

3.b. Cas général : dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.
On approche le volume du solide de section BCEF Par la somme des volumes des n cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande.
Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on saisit n.

```
1  V ← 0
2  Pour k allant de . . .à . . .
3        V ← . . .
4  Fin Pour
```


CORRECTION

Partie A – Modélisation de la forme de l'ampoule

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;4] : $f(x)=a+b\sin\left(c+\frac{\pi}{4}x\right)$.

1.a. La fonction f est dérivable sur [0;4].

$(\sin(\alpha x+\beta))'=\alpha\cos(\alpha x+\beta)$

$f'(x)=b\times\frac{\pi}{4}\times\cos\left(c+\frac{\pi}{4}x\right)$

1.b. Les tangentes aux points B (d'abscisse 0) et C (d'abscisse 4) de la courbe représentative de f sont parallèles à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(0)=f'(4)=0$.

$f'(0)=b\times\frac{\pi}{4}\times\cos(c)=0$

Or b est un nombre réel non nul.

$f'(0)=0 \Leftrightarrow \cos(c)=0 \Leftrightarrow \left(c=\frac{\pi}{2}=+2k\pi \text{ ou } c=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

On a c appartenant à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Conséquence

$f'(0)=0 \Leftrightarrow c=\frac{\pi}{2}$

Remarque

$f'(4)=b\times\frac{\pi}{4}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=0$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$f(x)=a+b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)$.

L'ordonnée du point B est 1 et l'ordonnée du point C est 3 donc :

$$\begin{cases}1= & a+b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ 3=a+b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=a+b\\ 3=a-b\end{cases}$$

On obtient : $2a=4 \Leftrightarrow a=2$ et $2b=-2 \Leftrightarrow b=-1$.

Conséquence

$f(x)=2-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)$

Partie B – Approximation du volume de l'ampoule

Remarque (ce résultat n'est pas demandé)

Pour tout nombre réel x : $\sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Conséquence

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $f(x)=2-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

1. Le cylindre de section le rectangle ABFG est un cylindre de base un cercle de diamètre [AG] (donc de rayon $r=\frac{AG}{2}=1$ cm et de hauteur $h=AB=1$ cm.

Le volume de ce cylindre est : $\pi\times r^2\times h=\pi\times 1^2\times 1=\pi$ cm^3

2. Le volume de la sphère de section le disque du plan (BCE) de diamètre [CE] (donc de rayon 3 cm) est :

$\frac{4}{3}\times\pi\times r^3=\frac{4}{3}\times\pi\times 3^3=36\pi \ \text{cm}^3$

Conséquence

Le volume de la demi sphère de section le demi-disque de diamètre [CE] est : $18\pi \ \text{cm}^3$

3.a. n=5

Le rayon de la base du cylindre choisi est égal à f(1,6) et la hauteur $h=\frac{4}{5}=0{,}8$.

$f(1{,}6)=2-\cos(0{,}4\pi)$

Le volume de ce cylindre est : $\pi\times(f(1{,}6))^2\times 0{,}8=\pi\times(2-\cos(0{,}4\pi))^2\times 0{,}8$ = **7,19 à 10^{-2} près.**

3.b. Cas général :

n est un entier naturel, non nul, quelconque.

On effectue la somme des n cylindres.

Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n-1, on calcule le volume du cylindre correspondant.

Le rayon du disque de base est : $f\left(\frac{4k}{n}\right)=2-\cos\left(\frac{\pi}{4}\times\frac{4k}{n}\right)=2-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

La hauteur du cylindre est : $\frac{4}{n}$.

Donc le volume du cylindre est : $\frac{4\pi}{n}\left(2-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$.

On recopie et on complète l'algorithme proposé.

1	**V ← 0**
2	**Pour k allant de 0 à n-1**
3	**V ←** $V+\frac{4\pi}{n}(2-cos(\frac{k\pi}{n}))^2$
4	**Fin Pour**

Complément **(non demandé)**

On se propose de donner une programmation en Python à cet algorithme.

Remarque

On ajoute une instruction à l'algorithme pour permettre à l'utilisateur de donner une valeur à n.

Programation en Python

```
print('Début de programme')
print("Veuillez entrer un entier naturel non nul")
m=input()
n=int(m)
from math import*
a=pi
V=0
for k in range(n):
    V=V+(4*a/n)*(2-cos(k*a/n))**2
print("V="+str(V))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

On donne plusieurs valeurs à n.

. **n=5**

```
Début de programme
Veuillez entrer un entier naturel non nul
5
V=46.49557127312894
Fin de programme
```

. **n=100**

```
Début de programme
Veuillez entrer un entier naturel non nul
100
V=56.046012940041905
Fin de programme
```

. **n=1000**

```
Début de programme
Veuillez entrer un entier naturel non nul
1000
V=56.49840228215888
Fin de programme
```