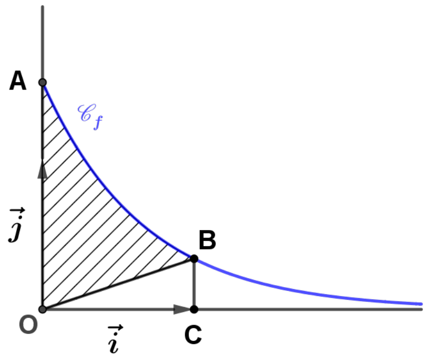
Exercice 3 — 4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=k\,e^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$.
On considère le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
Le point C a pour coordonnées (1;0).



1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Exprimer en fonction de k, l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}_f$ et le segment [OB].

3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f(x)=k\,e^{-kx}$ où k est un réel strictement positif.
Donc la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=-e^{-kx}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

2. Le triangle OCB est rectangle en C.
OC=1 et $BC=f(1)=k\,e^{-k}$.

L'aire du triangle OCB, en unité d'aire est égale à $A_1=\dfrac{OC\times OB}{2}=\dfrac{1}{2}k\,e^{-k}$ U.A.

. On détermine une équation cartésienne de la droite (OB).
O(0;0) et $B(1;k\,e^{-k})$.

Le coefficient directeur de (OB) est : $a=\dfrac{y_B-y_O}{x_B-x_O}=\dfrac{k\,e^{-k}-0}{1-0}=k\,e^{-k}$.

La droite (OB) passe par l'origine donc l'ordonnée à l'origine de (OB) est: 0.
$(OB):\ y=(k\,e^{-k})x$.
Le segment [OB] est la représentation paramétrique dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ de la fonction g définie sur [0;1] par $g(x)=(k\,e^{-k})x$.
$\mathscr{D}$ est le domaine plan compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle [0;1].

L'aire de $\mathscr{D}$, en unité d'aire,est égale à : $A_2=\displaystyle\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx$.

G définie par $G(x)=(k\,e^{-k})\dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de g sur [0;1].

$A_2=F(1)-G(1)-(F(0)-G(0))=-e^{-k}-\dfrac{1}{2}k\,e^{-k}-(-1-0)=1-e^{-k}-\dfrac{1}{2}e^{-k}$ U.A.

3. $A_2=2A_1 \Leftrightarrow 1-e^{-k}-\dfrac{1}{2}k\,e^{-k}=2\times\left(\dfrac{1}{2}k\,e^{-k}\right) \Leftrightarrow 1-e^{-k}-\dfrac{3}{2}k\,e^{-k}=0$

Or pour tout nombre réel strictement positif k : $e^k>0$
$\Leftrightarrow\ e^k(1-e^{-k}-1{,}5\,k\,e^{-k})=e^k\times 0 \Leftrightarrow e^k-1-1{,}5\,k=0$
On doit démontrer que cette équation admet une unique solution strictement positive (0 est solution de cette équation).
On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=e^x-1{,}5\,x-1$
h est dérivable sur $[0;+\infty[$.
$h'(x)=e^x-1{,}5$
$h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1{,}5 \Leftrightarrow x=\ln(1{,}5)$
$h'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1{,}5 \Leftrightarrow x>\ln(1{,}5)$
ln(1,5)=0,41 à 10^{-2} près
h(0)=0

si $x>0$ alors $h(x)=x\left(\dfrac{e^x}{x}-1{,}5-\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

Tableau de variation de h

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>ln(1.5)</td><td>α</td><td>+∞</td></tr>
<tr><td>h'(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>h(x)</td><td>0 ↘</td><td>m</td><td>↗ 0 ↗</td><td>+∞</td></tr>
</table>

m=h(ln(1,5))=1,5-1,5ln(1,5)-1= -0,11 à 10^{-2} près.
Si $0<x\leqslant\ln(1,5)$ alors h(x)< 0 et l'équation h(x)=0 n'admet pas de solution sur l'intervalle]0;ln(1,5)].
Sur l'intervalle $[\ln(1,5);+\infty[$, h est continue et strictement croissante, h(ln(1,5)) = m < 0 et h(1) = e-1,5-1 > 0 donc le héorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation h(x) = 0 admet une soluton unique α strictement positive et cette solution vérifie ln(1,5) < α < 1.
On peut déterminer une valeur approchée de α en utilisant la calculatrice par balayage ou par dichotomie.
On obtient $\alpha=0,76$ à 10^{-2} près.
On joint la représentation graphique pour $\alpha=0,76$ (représentation graphique non demandée).