Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.
Soit n un entier naturel n.
On note a_n la probabilité de l'événement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ».
On note b_n la probabilité de l'événement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ».
On note c_n la probabilité de l'événement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».
À l'étape n=0, le lapin est dans la galerie A.
Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1}=\qquad\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0.333	0.667	0
4	2	0.278	0.556	0.167
5	3	0.231	0.574	0.194
6	4	0.221	0.571	0.208
7	5	0.216	0.572	0.212
8	6	0.215	0.571	0.214
9	7	0.215	0.571	0.214
10	8	0.214	0.571	0.214
11	9	0.214	0.571	0.214
12	10	0.214	0.571	0.214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?

2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n=a_n-c_n$.
1.a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
1.b. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.

2.a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6} v_n$.

2.b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

3. En déduire pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout entier naturel n, $b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n$.

On doit écrire dans C3 : $=\left(\frac{2}{3}\right)\times B2+\left(\frac{1}{2}\right)\times C2+\left(\frac{2}{3}\right)\times D2$

2. À long terme le lapin a la plus grande probabilité de se trouver dans la galerie B.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n : $u_n=a_n-c_n$.

1.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{4}b_n-14\,b_n-\frac{1}{3}c_n=\frac{1}{3}\times(a_n-c_n)=\frac{1}{3}u_n$$

(u_n) est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{3}$.

1.b. $u_0=a_0-c_0=1-0=1$

Pour tout entier naturel n :

$$u_n=u_0\times q^n=1\times q^n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

2. Pour tout entier naturel n : $v_n=b_n-\frac{4}{7}$.

2.a. Pour tout entier naturel n :

Les événements : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n », « le lapin est dans la galerie B à l'étape n » et « le lapin est dans la galerie C à l'étape n » forment un partition de l'univers donc pour tout entier naturel n on a : $a_n+b_n+c_n=1$.

Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=b_{n+1}-\frac{4}{7}=\left(\frac{2}{3}\right)a_n+\left(\frac{1}{2}\right)b_n+\left(\frac{2}{3}\right)c_n-\frac{4}{7}=\left(\frac{2}{3}\right)(a_n+c_n)+\left(\frac{1}{2}\right)b_n-\frac{4}{7}=\left(\frac{2}{3}\right)(1-b_n)+\left(\frac{1}{2}\right)b_n-\frac{4}{7}$$

$$v_{n+1}=-\left(\frac{2}{3}\right)b_n+\left(\frac{1}{2}\right)b_n+\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}b_n+\frac{2}{21}=-\frac{1}{6}b_n+\frac{4}{42}=-\frac{1}{6}\left(b_n-\frac{4}{7}\right)$$

$$v_{n+1}=-\frac{1}{6}v_n$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\left(-\frac{1}{6}\right)$.

2.b. $v_0=b_0-\frac{4}{7}=-\frac{4}{7}$

Pour tout entier naturel n :

$$v_n=v_0\times q^n=-\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n .$$

3. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_n+b_n+c_n= & 1 \\ a_n-c_n= & \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ b_n-\frac{4}{7}= & -\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{cases}$$

On obtient :

$$b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

et $a_n + c_n = 1 - b_n = 1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$

$$2a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$2c_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

4. $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$-1 < -\frac{1}{6} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$

<u>Conséquences</u>

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{4}{7}$$

$$\lim_{n \to =\infty} b_n = \frac{3}{14}$$

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{3}{14}$$

Donc, à long terme le lapin a la plus grande probabilité de se truver dans la galerie B.