Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité.
À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A – Étude dans un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6.
On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.
On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans état excité n nanosecondes après le début de l'observation.
On a donc $a_0=1$ et $b_0=0$.
On appelle X_n la matrice ligne $X_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$.
L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2=0{,}993025$ et $b_2=0{,}006975$.

2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=X_n A$
A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
On admet alors que pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=X_0 A^n$.

3. On définit la matrice P par P= $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 120\end{pmatrix}$

On admet que P est inversible et que $P^{-1}=\dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice D définie par $D=P^{-1}AP$

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n=PD^nP^{-1}$.

5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n, $A^n=\dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120+0{,}395^n & 1-0{,}395^n\\ 120(1-0{,}395^n) & 1+120\times 0{,}395^n\end{pmatrix}$.

En déduire une expression de a_n en fonction de n.

6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B – Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait en revanche qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.

2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabise autour de 2 %.
On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire,tel que XM=X, et que X= $\begin{pmatrix}0{,}98 & 0{,}02\end{pmatrix}$.
Déterminer la valeur de a.

CORRECTION

Partie A

Pour tout entier naturel n :
on note A_n l'événement : « l'atome est dans un état stable n nanosecondes après le début de l'observation »,
B_n l'événement « l'atome est dans un état excité n nanosecondes après le début de l'observation ».
$B_n=\overline{A_n}$
$P(A_n)=a_n$ et $P(B_n)=b_n$ et $a_n+b_n=1$
$P_{A_n}(B_{n+1})=0{,}005$ donc $P_{A_n}(A_{n+1})=1-0{,}005=0{,}995$
$P_{B_n}(A_{n+1})=0{,}6$ donc $P_{B_n}(B_{n+1})=1-0{,}6=0{,}4$;

1. $a_0=1$ et $b_0=0$
$a_1=P_{A_0}(A_1)=P(A_0)\times P_{A_0}(A_1)=1\times 0{,}995$ = **0,995**
$b_1=P(B_1)=1-a_1$ = **0,005**
. $a_2=P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(A_2)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(A_2)$
$a_2=0{,}995\times 0{,}995+0{,}005\times 0{,}6=0{,}990025+0{,}003$ = **0,993025**
$b_2=1-a_2=1-0{,}9983025$ = **0,006975**

2. $X_{n+1}\ (a_{n+1}\quad b_{n+1})$ et $X_n\ (a_n\quad b_n)$
$a_{n+1}=P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(A_{n+1})=a_n\times 0{,}995+b_n\times 0{,}6$
$b_{n+1}=P(A_n\cap B_{n+1})+P(B_n\cap B_{n+1})=P(A_n)\times P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1})=a_n\times 0{,}005+b_n\times 0{,}4$

$$\begin{cases} a_{n+1}=0{,}995\,a_n+0{,}6\,b_n \\ b_{n+1}=0{,}005\,a_n+0{,}4\,b_n\end{cases}$$

Attention dans cet exercice on utilise les matrices lignes.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_n+\beta b_n & \gamma a_n+\delta b_n\end{pmatrix}$$

donc $\alpha=0{,}995$ $\beta=0{,}6$ $\gamma=0{,}005$ $\delta=0{,}4$

$$A=\begin{pmatrix}0{,}995 & 0{,}005\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$$

On admet que pour tout entier naturel n : $X_n=X_0A^n$.

3. $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 120\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}0{,}995 & 0{,}005\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$ $D=P^{-1}AP$

$$AP=\begin{pmatrix}0{,}995+0{,}005 & -0{,}995+0{,}6\\ 0{,}6+0{,}4 & -0{,}6+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -0{,}395\\ 1 & 47{,}795\end{pmatrix}$$

$$D=P^{-1}AP=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}120 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0{,}395\\ 1 & 47{,}4\end{pmatrix}=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}121 & 0\\ 0 & 47{,}795\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}395\end{pmatrix}$$

4. Remarque :

$$PP^{-1}=P^{-1}P=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$D=P^{-1}AP \Leftrightarrow PDP^{-1}=P(P^{-1}AP)P^{-1}=(PP^{-1})A(PP^{-1})=IAI=A$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$A^n=PP^nP^{-1}$
Initialisation

Pour n=0, $A^0=I$ et $D^0=I$ donc $PD^0P^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$ et $A^0=PD^0P^{-1}$
La propriété est vérifiée pour n=0.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose : $A^n=PD^nP^{-1}$ et on doit démontrer que : $A^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}$.
Or $A^{n+1}=A^nA^1=(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})=PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^nIDP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel $A^n=PD^nP^{-1}$.

5. On admet pour tout entier naturel n :

$$A^n=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}120+0{,}395^n & 1-0{,}395^n\\ 120(1-0{,}395^n) & 1+120\times 0{,}395^n\end{pmatrix}$$

On a : $X_n=(a_n \quad b_n)=X_0A^n=(1 \quad 0)\ A^n$

donc : $a_n=\frac{1}{121}(120+0{,}395^n)=\frac{120}{121}+\frac{1}{121}\times 0{,}395^n$.

6. $0<0{,}395<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}395^n=0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{120}{121}$.

À long terme la probabilité que l'atome soit à l'état stable est : $\frac{120}{121}$

Partie B

1. Avec les notations de la partie A, on a :
$P_{A_n}(B_{n+1})=0{,}01$ et $P_{A_n}(A_{n+1})=1-0{,}01=0{,}99$
$P_{B_n}(A_{n+1})=a$ et $P_{B_n}(B_{n+1})=1-a$.
On obtient pour matrice de transition :

$$M=\begin{pmatrix}0{,}99 & 0{,}01\\ a & 1-a\end{pmatrix}$$

2. $X=XM \Leftrightarrow (0{,}98 \quad 0{,}02)=(0{,}98 \quad 0{,}02)\begin{pmatrix}0{,}99 & 0{,}01\\ a & 1-a\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}98=0{,}98\times 0{,}99+0{,}02\times a\\ 0{,}02=0{,}98\times 0{,}01+0{,}02\times(1-a)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0{,}98=0{,}9702+0{,}02a\\ 0{,}02a=0{,}0098+0{,}02-0{,}02a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}02a=0{,}98-0{,}9702\\ 0{,}02a=0{,}0098\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{0{,}0098}{0{,}02}\end{cases}$

donc **a=0,49.**