Exercice 1 — 6 points

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000°C.

À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.
La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que la température est inférieure à 70°C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0=1000$.
La température T_n est calculée par l'algorithme suivant.

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
    T ← 0.82xT+3.6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier n, on a : $T_n=980\times 0{,}82^n+20$.
3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

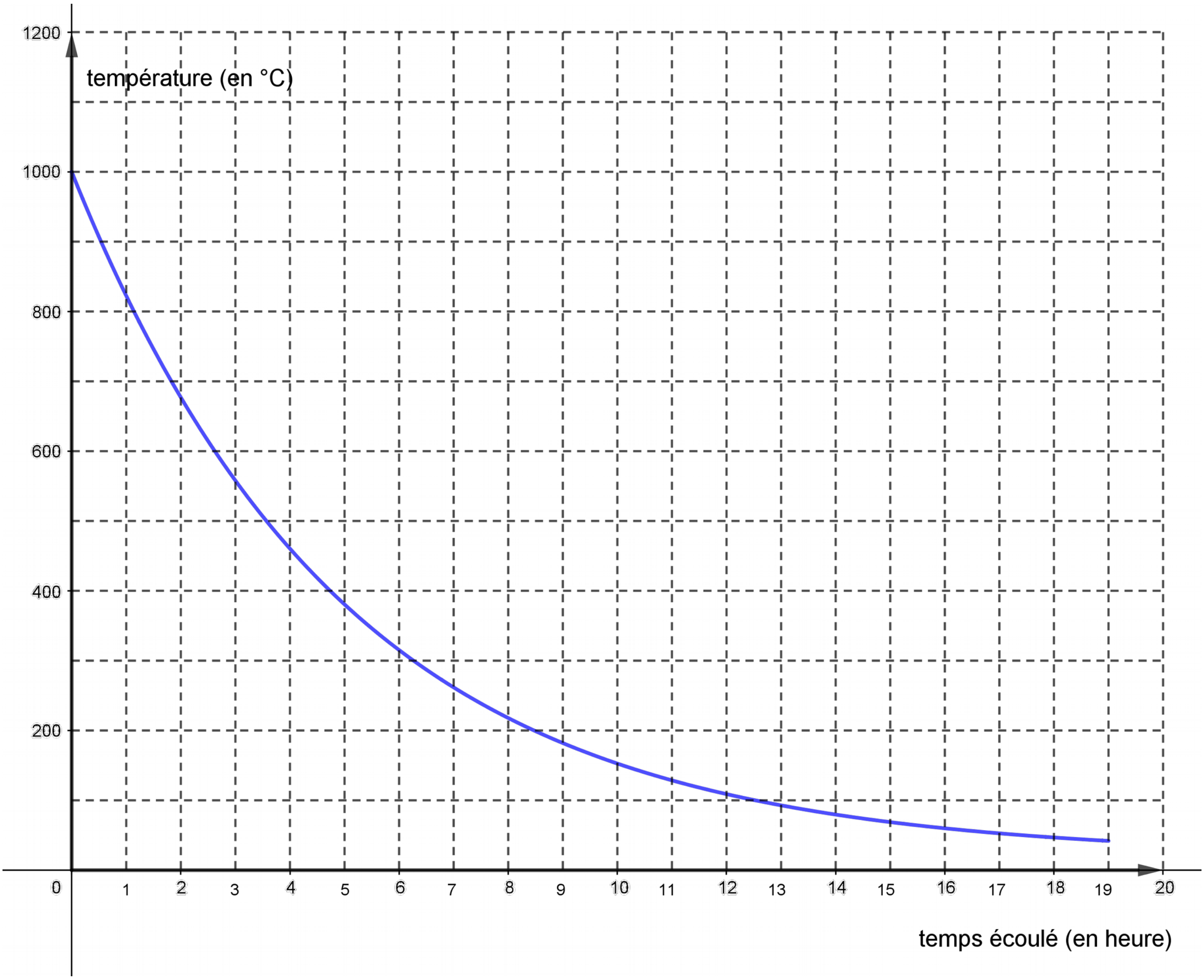
Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif par : $f(t)=a e^{-\frac{t}{5}}+b$ où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t)+\frac{1}{5}f(t)=4$.

1. Déterminer a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1000°C.
C'est à dire que $f(0)=1000$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t)=980 e^{-\frac{t}{5}}+20$
2.a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.
2.b. Étudier les variation de f sur $[0;+\infty[$.
En déduire son tableau de variation complet.
2.c. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par :
$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$
3.a. À l'aide de la représentation graphique de f ci-après, donner une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement.
Expliquer votre démarche.



3.b. Calculer la valeur exacte de cette température moyenne θ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius .

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et (t+1). Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif : $d(t)=f(t)-f(t+1)$.

4.a. Vérifier que, pour tout nombre réel t positif : $d(t)=980\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)e^{-\frac{t}{5}}$

4.b. Déterminer la limite de d(t) lorsque t tend vers $+\infty$
Quelle interprétation peut-on en donner ?

CORRECTION

Partie A

1. En utilisant la calculatrice et l'algorithme, on obtient pour n=4 :

$T_0=1000$

$T_1=0{,}82\times T_0+3{,}6=823{,}6$ valeur arrondie à l'unité 824

$T_2=0{,}82\times T_1+3{,}6=678{,}952$ valeur arrondie à l'unité 679

$T_3=0{,}82\times T_2+3{,}6=560{,}34064$ valeur arrondie à l'unité 560

$T_4=0{,}82\times T_3+3{,}6=463{,}0793248$ valeur arrondie à l'unité 463

Au bout de quatre heures de refroidissement la température du four sera : 463°C.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :

$T_n=980\times 0{,}82^n+20$

Initialisation

$T_0=1000$ et $980\times 0{,}82^0+20=980+20=1000$.

La propriété est vérifiée pour n=0

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :

$T_n=980\times 0{,}82^n+20$ et on doit démontrer que : $T_{n+1}=980\times 0{,}82^{n+1}+20$.

Or $T_{n+1}=0{,}82\times T_n+3{,}6=0{,}82\times(980\times 0{,}82^n+20)+3{,}6=980\times 0{,}82^{n+1}+0{,}82\times 20+3{,}6$

$T_{n+1}=980\times 0{,}82^{n+1}+16{,}4+3{,}6=980\times 0{,}82^{n+1}+20$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $T_n=980\times 0{,}82^n+20$.

3. Pour déterminer le nombre d'heures nécessaires pour ouvrir la porte du four, sans risque, il suffit de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $T_n < 70$.

$T_n < 70 \Leftrightarrow 980\times 0{,}82^n+20 < 70 \Leftrightarrow 0{,}82^n < \frac{50}{980}=\frac{5}{98}$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}82^n) < \ln\left(\frac{5}{98}\right) \Leftrightarrow n\times\ln(0{,}82) < \ln\left(\frac{5}{98}\right)$

$0 < 0{,}82 < 1$ donc $\ln(0{,}82) < 0$

$\Leftrightarrow n > \ln\left(\frac{5}{98}\right) : \ln(0{,}82)$

$\ln\left(\frac{5}{98}\right) : \ln(0{,}82)=14{,}994$ à 10^{-3} près.

Le plus petit entier naturel n tel que $T_n < 70$ est : 15.

Conclusion

Au bout de **15 heures**, on peut ouvrir ,sans risque, la porte du four.

Compléments (non demandés)

. On peut utiliser le logiciel Python pour programmer l'algorithme donné

```
print('Début du programme')
print("Veuillez entrer un entier naturel non nul n:")
m=input()
n=int(m)
T=1000
for i in range(n):
    T=0.82*T+3.6
t=round(T)
print("T="+str(t))
print('Fin de programme')
```

. Exécution du programme pour $n=4$

```
Début du programme
Veuillez entrer un entier naturel non nul n:
4
T=463
Fin de programme
```

On obtient **463°C**

. On peut aussi utiliser un algorithme pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $T_n < 70$.
Programmation de l'algorithme en Python

```python
print('Début de programme')
T=1000
n=0
while(T>=70):
    T=0.82*T+3.6
    n=n+1
print("n="+str(n))
print('Fin de programme')
```

. Exécution du programme

```
Début de programme
n=15
Fin de programme
```

On obtient **15 heures.**

Partie B

t appartient à l'intervalle $[0;+\infty[$

$f(t)=a e^{-\frac{t}{5}}+b$

On admet que f vérifie la relation suivante :

$f'(t)+\frac{1}{5}f(t)=4$

1. $f(0)=a e^0+b=a+b=1000$

$\left(e^{-\frac{t}{5}}\right)'=-\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}$ donc $f'(t)=-\frac{1}{5}a e^{-\frac{t}{5}}$ et $f'(0)=-\frac{1}{5}a$

$f'(0)+\frac{1}{5}f(0)=4 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}(a+b)=4 \Leftrightarrow \frac{1}{5}b=4 \Leftrightarrow b=20$

$a+b=1000 \Leftrightarrow a=1000-20=980$

Pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$:

$f(t)=980 e^{-\frac{t}{5}}+20$ ·

2.a. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{5}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{5}}=0$

Conséquence :

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(980 e^{-\frac{t}{5}}+20\right)=20$ soit $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=20$.

2.b. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(t)=-\frac{980}{5}e^{-\frac{t}{5}}$.

Or $e^{-\frac{t}{5}} > 0$ donc $f'(t) < 0$.
La fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

<u>Tableau de variation de f</u>

t	0		$+\infty$
f'(t)		−	
f(t)	1000	↘	20

2.c.

$f(t) < 70 \Leftrightarrow 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 < 70 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5}} < \frac{50}{980} = \frac{5}{98}$

ln est une une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\frac{t}{5}}\right) < \ln\left(\frac{5}{98}\right) \Leftrightarrow -\frac{t}{5} < \ln\left(\frac{5}{98}\right) \Leftrightarrow t > -5\ln\left(\frac{5}{98}\right)$

t est exprimé en heure pour obtenir le temps en minutes on doit multiplier par 60.

$-5\ln\left(\frac{5}{98}\right) \times 60 = 892{,}789$ à 10^{-3} près.

Valeur arrondie à l'unité : 893.

Au bout de 893 minutes , on peut ouvrir la porte du four , sans risque.

3. la température moyenne (en degré Celsius) sur les quinze premières heures dev refroidissement est :

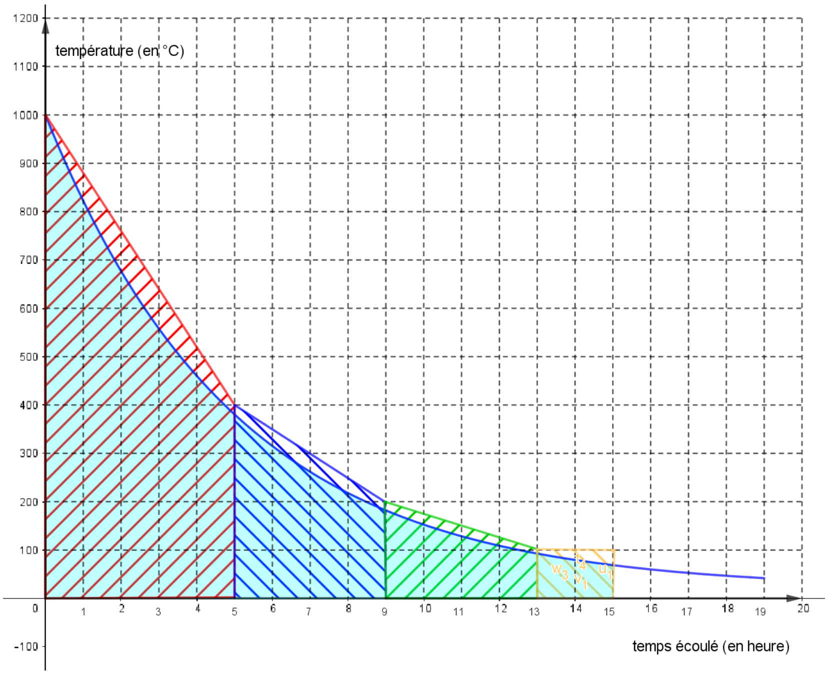
$\frac{1}{15-0}\int_0^{15} f(t)\,dt = \frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)\,dt$.

3.a. $\int_0^{15} f(t)\,dt$ est l'aire, en unité d'aire,de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations x=0 et x=15.

Pour donner une ***estimation*** de l'aire de cette partie, on trace une ligne brisée ***« voisine »*** de la courbe représentative de f, en utilisant le quadrillage proposé, et on calcule une somme d'aires de trapèzes ou rectangles.

On propose de donner deux exemples simples pour remarquer la différence des résultats possibles.

Pour le premier exemple, on choisit une ligne brisée située au dessus de la courbe représentative de f donc nécessairement l'estimation sera supérieure à la valeur exacte de l'aire.



Aire du premier trapèze (hachuré en rouge) : $\frac{1}{2}\times(1000+400)\times5=700\times5=3500$ unités d'aire.

Aire du deuxième trapèze (hachuré en bleu) : $\frac{1}{2}\times(400+200)\times4=300\times4=1200$ unités d'aire.

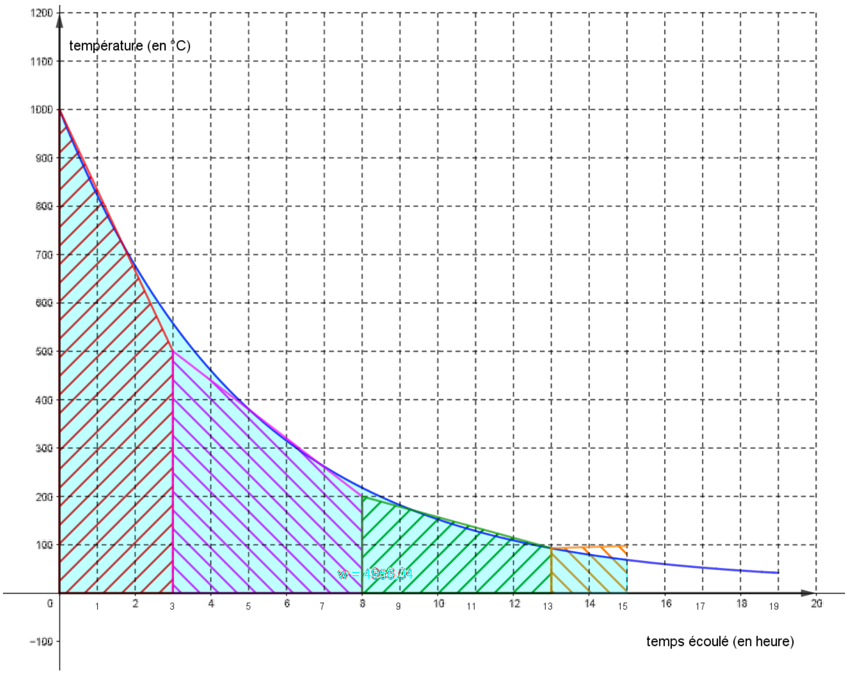
Aire du troisième trapèze (hachuré en vert) : $\frac{1}{2}\times(200+100)\times4=150\times4=600$ unités d'aire.

Aire du rectangle (hachuré en jaune) : $100\times2=200$ unités d'aire.

On obtient pour ***estimation*** de l'aire sous la courbe : $3500+1200+600+200=5500$ unités d'aire

et pour ***estimation*** de la température moyenne θ $\frac{5500}{15}=\frac{1100}{3}$ = **367°C** à l'unité près.

Pour le deuxième exemple, la ligne brisée est plus « voisine » de la courbe représentative de f, mais on ne peut pas préciser si l'estimation est supérieure ou inférieure à la valeur exacte de l'aire demandée.



Aire du premier trapèze (hachuré en rouge) : $\frac{1}{2}\times(1000+500)\times3=750\times3=2250$ unités d'aire.

Aire du deuxième trapèze (hachuré en violet) : $\frac{1}{2}\times(500+200)\times5=350\times5=1750$ unités d'aire.

Aire du troisième trapèze (hachuré en vert) : $\frac{1}{2}\times(200+100)\times 5=150\times 5=750$ unités d'aire.

Aire du rectangle (hachuré en jaune) : $100\times 2=200$ unités d'aire.
On obtient pour ***estimation*** de l'aire sous la courbe : $2250+1750+750+200=4950$ unités d'aire et pour ***estimation*** de la température moyenne θ $\frac{4950}{15}$ = **330°C.**

3.b. a est un nombre réel non nul.

$g(t)=e^{at}$ $\quad G(t)=\frac{1}{a}e^{at}$

G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

$g(t)=e^{-\frac{t}{5}}$ $\quad G(t)=-5e^{-\frac{t}{5}}$

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$

$f(t)=980e^{-\frac{t}{5}}+20$

donc la fonction F définie par

$F(t)=-5\times 980e^{-\frac{t}{5}}+20t=-4900e^{-\frac{t}{5}}+20t$

est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

$\int_0^{15} f(t)dt = F(15)-F(0)=-4900e^{-3}+20\times 15-(-4900)=-4900e^{-3}+300+4900=5200-4900e^{-3}$

$\theta = \frac{5200-4900e^{-3}}{15}$ = **330°C** à l'unité près.

4.a. $d(t)=f(t)-f(t+1)=980e^{-\frac{t}{5}}+20-980e^{\frac{t+1}{5}}-20 = 980\left(e^{-\frac{t}{5}}-e^{-\frac{t}{5}}\times e^{-\frac{1}{5}}\right)$

$d(t)=980e^{-\frac{t}{5}}\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)$.

4.b. $1-e^{-\frac{1}{5}}>0$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{5}}=0$ donc $\lim_{t\to+\infty} d(t)=0$

À long terme la température du four ne variera plus pour une différence d'une heure donc la température du four reste stable (au degré près).