Exercice 2 4 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a=-4$, $b=2$ et $c=4$.

1. On considère les points A',B' et C' d'affixes respectives $a'=ja$, $b'=jb$ et $c'=jc$ où le nombre j est le nombre complexe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.a. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.

En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.

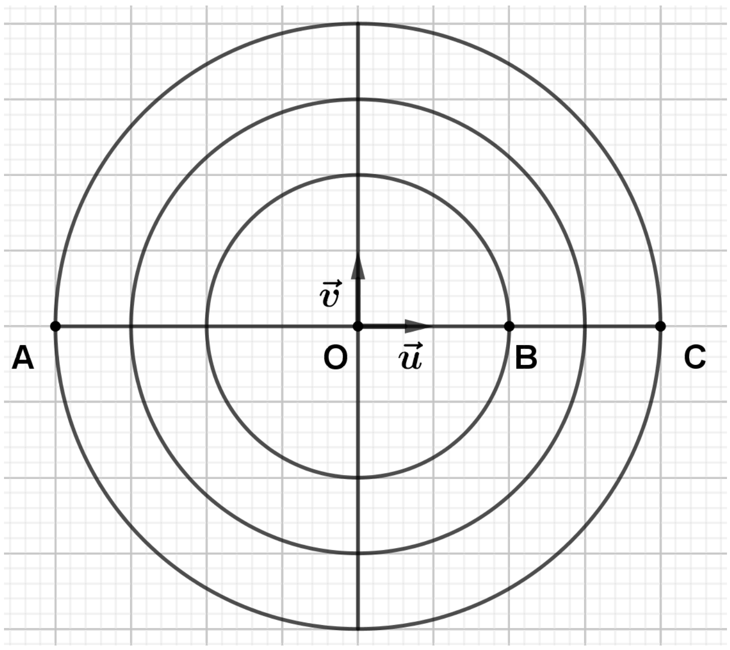
1.b. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni en **Annexe.**

Placer les points A', B' et C' sur ce graphique.

2. Montrer que les points A',B' et C' sont alignés.

3. On note M le milieu du segment [A'C], N le milieu du segment [C'C] et P le milieu du segment [C'A]. Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

ANNEXE
À COMPLÉTER ET À REMETTRE AVEC LA COPIE



CORRECTION

1.a. $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $|j|^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ donc $|j|=1$

$\cos(\alpha)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\alpha \equiv \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

$j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$a'=-4j$ $-4=4(\cos(\pi)+i\sin(\pi))=4e^{i\pi}$

$a'=4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}=4e^{i\frac{5\pi}{3}}=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

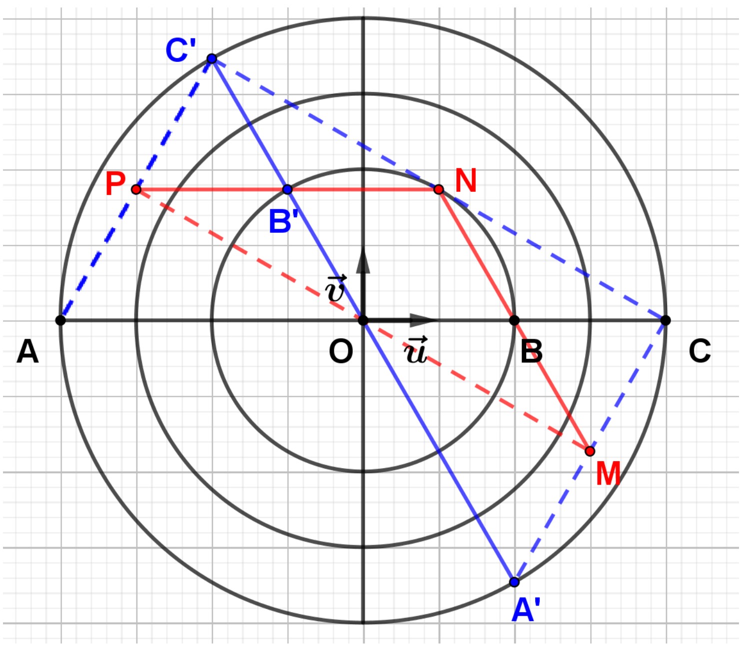
$b'=2j$ $2=2e^{i0}$

$b'=2e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$c'=4j$ $4=4e^{i0}$

$c'=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

1.b.



2. $|a'|=4$ donc le point A' appartient au cercle de centre O et de rayon 4.

$(\vec{u};\overrightarrow{OA'})=\frac{5\pi}{3} \quad (2\pi)$

$|b'|=2$ donc le point B' appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

$(\vec{u};\overrightarrow{OB'})=\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

$|c'|=4$ donc le point C' appartient au cercle de centre O et de rayon 4.

$(\vec{u};\overrightarrow{OC'})=\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OC'})=(\vec{u};\overrightarrow{OC'})-(\vec{u};\overrightarrow{OB'}) \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OC'})=\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OC'})=0 \quad (2\pi)$

Les points O, B' et C' sont alignés.

$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OC'})=(\vec{u};\overrightarrow{OA'})-(\vec{u};\overrightarrow{OB'})\quad(2\pi)$

$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA'})=\frac{5\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\quad(2\pi)$

$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OC'})=\pi\quad(2\pi)$

Les points O, B' et A' sont alignés.

Conclusion.

Les points A', B', C' et O sont alignés.

3. Dans le triangle AC'C, N est le milieu de [CC'] et P est le milieu de [AC'] donc $NP=\frac{1}{2}AC$.

[AC] est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 4 donc $NP=\frac{1}{2}\times 8=$ **4 .**

Dans le triangle A'C'C, M est le milieu de [CA'] et N est le milieu de [CC'] donc $NM=\frac{1}{2}A'C'$.

[A'C']est un diamètre ducercle de centre O et de rayon 4 donc $NM=\frac{1}{2}\times 8=$ **4.**

Conclusion

Le triangle MNP est isocèle en N.