

Exercice 3

5 points

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.

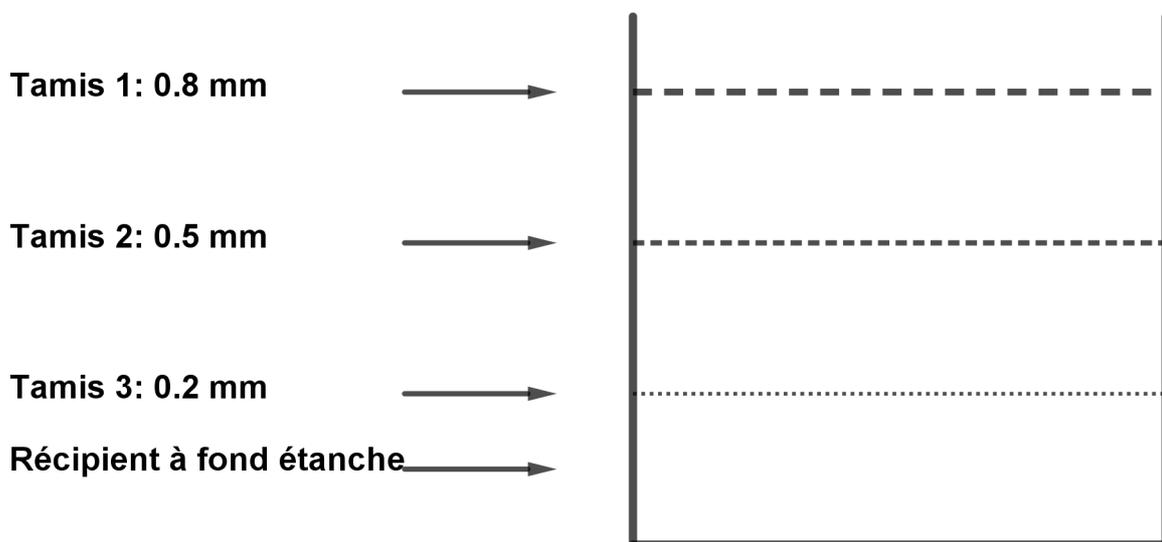
Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche. Les ouvertures des mailles sont les suivantes :



Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_U qui suit la loi normale de moyenne $\mu_U=0,58$ mm et d'écart-type $\sigma_U=0,21$ mm .
 - 1.a. Calculer les probabilités des événements suivants : $X_U < 0,2$ et $0,5 < X_U < 0,8$.
 - 1.b. On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis. Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2..

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_V qui suit la loi normale de moyenne $\mu_V=0,65$ mm et d'écart-type σ_V à déterminer.

Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2.

Quelle est la valeur de l'écart-type σ_V de la variable aléatoire X_V ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre de l'exploitation V est extra fin.

On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise, et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les événements suivants :

. U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;

. V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;

. E : « Le paquet porte le label *extra fin* ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V sans mélanger les sucres des deux exploitations.

1.a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?

1.b. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Partie C

1. L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label « extra fin » qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets, 30 contiennent du sucre de l'exploitation U.

A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ». Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la nouvelle proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

CORRECTION

Partie A

1. X_U est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $\mu_U=0,58$ et d'écart-type $\sigma_U=0,21$.

1.a. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$P(X_U < 0,2) = \mathbf{0,035}$$

$$P(0,5 \leq X_U < 0,8) = \mathbf{0,501}$$

1.b. La masse (en gramme) de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche est :

$$1800 \times 0,035 = \mathbf{63g.}$$

La masse de sucre récupérée dans le tamis 2 est :

$$1800 \times 0,501 = \mathbf{901,8g}$$

2. X_V est une variable aléatoire suivant la normale de moyenne $\mu_V=0,65$ et d'écart-type σ_V .

La variable aléatoire $Y = \frac{x_v - 0,65}{\sigma_V}$ suit la loi normale centrée et réduite

$$0,5 \leq X_V \leq 0,8 \Leftrightarrow \frac{0,5 - 0,65}{\sigma_V} \leq \frac{X_V - 0,65}{\sigma_V} \leq \frac{0,8 - 0,65}{\sigma_V} \Leftrightarrow -\frac{0,15}{\sigma_V} \leq Y \leq \frac{0,15}{\sigma_V}$$

$$P(0,5 \leq Y \leq 0,8) = 0,4 \Leftrightarrow P\left(-\frac{0,15}{\sigma_V} \leq Y \leq \frac{0,15}{\sigma_V}\right) = 0,4.$$

Pour déterminer, avec la calculatrice, le réel λ tel que $P(-\lambda \leq Y \leq \lambda) = 0,4$, on détermine λ tel que $P(Y \leq \lambda) = P(\lambda \leq Y) = 0,3$.

On obtient $\lambda = 0,524$.

$$\frac{0,15}{\sigma_V} = 0,524 \Leftrightarrow \sigma_V = \frac{0,15}{0,524} = \mathbf{0,286.}$$

Partie B

1. L'énoncé précise :

- L'entreprise fabrique 30 % de ses paquets de sucre avec l'exploitation U (donc 70 % avec l'exploitation V).

$$P(U) = 0,3 \text{ et } P(V) = 0,7$$

- 3 % du sucre provenant de l'exploitation U et 5 % du sucre provenant de l'exploitation V sont *extra fin*.

$$P_U(E) = 0,03 \text{ et } P_V(E) = 0,05.$$

1.a. En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(U \cap E) + P(V \cap E) = P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E)$$

$$P(E) = 0,3 \times 0,03 + 0,7 \times 0,05 = 0,009 + 0,035 = \mathbf{0,044}$$

1.b. On nous demande de calculer : $P_E(U)$.

$$P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0,009}{0,044} = \frac{9}{44} = \mathbf{0,255}$$

2. On veut obtenir $P_E(U) = 0,3 = \frac{P(E \cap U)}{P(E)}$.

On note $P(U) = p$ et $P(V) = 1 - p$.

$$P_U(E) = 0,03 \text{ et } P_V(E) = 0,05.$$

$$P(E \cap U) = P(U) \times P_U(E) = p \times 0,03 = 0,03p$$

$$P(E \cap V) = P(V) \times P_V(E) = (1 - p) \times 0,05 = 0,05 - 0,05p$$

$$P(E) = P(E \cap U) + P(E \cap V) = 0,03p + 0,05 - 0,05p = 0,05 - 0,02p$$

$$P_E(U) = \frac{0,03p}{0,05 - 0,02p} = 0,3 \Leftrightarrow 0,03p = 0,3 \times (0,05 - 0,02p) \Leftrightarrow 0,03p = 0,015 - 0,006p$$

$$\Leftrightarrow 0,036p = 0,015 \Leftrightarrow p = \frac{0,015}{0,036} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = \mathbf{0,417.}$$

Pour atteindre son objectif l'entreprise doit acheter 41,7 % de son sucre à l'exploitation U et 58,3 % à l'exploitation V.

Partie C

1. L'entreprise annonce 30 % de paquets de sucre portant le label *extra fin* qu'elle conditionne contient du sucre provenant de l'exploitation U donc la proportion de paquets portant le label *extra fin* provenant de l'exploitation U est $p=0,3$.

On prélève au hasard et de manière indépendante (étant donné le grand nombre de paquets) 150 paquets.

$$n=150 \geq 30 \quad np=45 \geq 5 \quad n(1-p)=105 \geq 5$$

On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_n = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$I_{150} = \left[0,3 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{150}}; 0,3 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{150}} \right]$$

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{150}} = 0,073 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$I_{150} = [0,217; 0,373]$$

La proportion constatée dans cet échantillon est $\frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2$.

0,2 n'appartient pas à I_{150} .

L'acheteur doit remettre en question l'annonce de l'entreprise avec un risque d'erreur de 5 %.

2. La fréquence constatée parmi les 150 paquets est : $f=0,42$.

$$n=150 \geq 30 \quad nf=63 \geq 5 \quad n(1-f)=87 \geq 5$$

L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est :

$$J = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

$$J = \left[0,42 - \frac{1}{\sqrt{150}}; 0,42 + \frac{1}{\sqrt{150}} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{150}} = 0,082 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$$J = [0,338; 0,502].$$