Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2;1;4), (4;-1;0), (0;3;2) et (4;3;-2).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

2.a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

2.b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3;3;-1). Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

2.c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $12\ \text{cm}^2$.

3.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

3.b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3.c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

3.d. Démontrer que le point L d'intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

CORRECTION

1. La droite (CD) est la droite passant par C(0;3;2) et de vecteur directeur $\vec{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

M(x;y;z) appartient à la droite (CD) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{CM}=t\vec{CD}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{OM}=t\vec{CD}+\vec{OC}$.

On obtient pour représentation paramétrique de (CD) :

$$(CD)\quad\begin{cases}x=4.t+0\\y=0.t+3\\z=-4.t+2\end{cases}\quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2.a. La distance BM est minimale si et seulement BM^2 est minimal.

$BM^2=(4t-4)^2+4^2+(-4t+2)^2=16t^2-32t+16+16+16t^2-16t+4$

$BM^2=32t^2-48t+36=4(8t^2-12t+9)$.

La distance BM est minimale si et seulement si $T(t)=8t^2-12t+9$ est minimal.

$T'(t)=16t-12$

$T'(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

Le coefficient de t^2 : 8 est positif donc T(t) est minimal pour $t=\frac{3}{4}$.

$M\left(4\times\frac{3}{4};3;-4\times\frac{3}{4}+2\right)$ **M(3;3;-1).**

2.b. B(4;-1;0) H(3;3;-1) $\vec{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{BH}.\vec{CD}=-1\times4+4\times0-1\times(-4)=0$.

Les droites (BH) et (CD) sont orthogonales, de plus H appartient à (CD) donc les droites (BH) et (CD) sont sécantes en H.

Conclusion

Les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

2.c. (BH) est la hauteur du triangle BCD issue de B.

L'aire (en cm^2) du triangle BCD est égale à : $\frac{1}{2}\times CD\times BH$.

$CD^2=4^2+0^2+(-4)^2=32 \qquad CD=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$BH^2=(-1)^2+4^2+(-1)^2=18 \qquad BH=3\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\times CD\times BH=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times12\times2=$ **12** cm^2

3.a. $\vec{CB}$ et $\vec{CD}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) $\vec{CB}\begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{CB}$ et $\vec{CD}$.

$\vec{CB}.\vec{n}=4\times2-4\times1-2\times2=8-4-4=0$

$\vec{CD}.\vec{n}=4\times2+0\times1-4\times2=8-8=0$

Conclusion

$\vec{n}$ **est normal au plan (BCD).**

3.b. M(x;y;z) appartient au plan (BCD) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM}$ est orthogonal à $\vec{n}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-4)\times 2+(y+1)\times 1+(z-0)\times 2=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-8+y+1+2z=0$

$\Leftrightarrow$ **2x+y+2z-7 = 0 .**

3.c. Δ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

$$\Delta : \begin{cases} x=2\times k+2 \\ y=1\times k+1 \\ z=2\times k+4 \end{cases} \quad k \text{ décrit } \mathbb{R}$$

3.d. Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de Δ et du plan (BCD), on résout le système :

$$\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ x=2k+2 \\ y=k+1 \\ z=2k+4 \end{cases}$$

On obtient :

$2\times(2k+2)+k+1+2\times(2k+4)-7=0$ $\Leftrightarrow$ $4k+4+k+1+4k+8-7=0$ $\Leftrightarrow$ $9k+6=0$ $\Leftrightarrow$

$k=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$

$x=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-\frac{4}{3}+\frac{6}{3}=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}+1=-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$, $z=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+4=-\frac{4}{3}+\frac{12}{3}=\frac{8}{3}$

$L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

La hauteur issue de A du tétraèdre ABCD est $h=AL$.

$AL^2=\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}=\frac{36}{9}=4$ **AL = 2 cm.**

Le volume du tétraèdre ABCD est égal à : $\frac{1}{3}\times 2\times 12=$ **8** cm^3