EXERCICE 1 5 points

Dans cet exercice et sauf mention contraire , le résultats seront arrondis à 10^{-3} .

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*
On s'intéresse à deux types de tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.

1.a. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.
On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

1.b. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1 .
Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z=\dfrac{X_1-1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle $[298;302]$. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % non « conformes pour la longueur » est acceptable.
On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent non « conformes pour la longueur ».

2.a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

2.b. Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Partie B

Des erreurs de réglage dans la chaîne de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2.

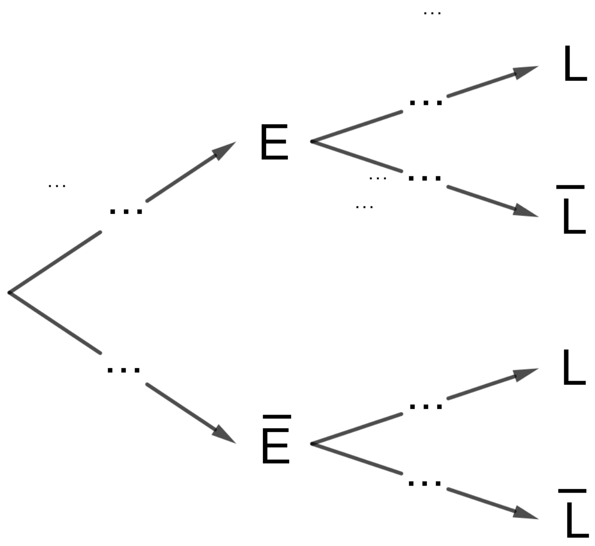
Une étude menée sur la production a permis de constater que :

- 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;
- parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;
- 3,6 % des tubes de type ont une épaisseur non conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les événements :

- E : « L'épaisseur du tube est conforme » ;
- L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.
2. Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,948.

CORRECTION

Partie A

1.a. X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.
Le tube est accepté si et seulement si : $1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65$.
En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) =$ **0,968** à 10^{-3} près.

1.b. $P(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) = 0{,}98 \iff P(X_1 \leqslant 1{,}35) = P(1{,}64 \leqslant X_1) = \frac{1}{2}(1-0{,}98) = 0{,}01$

$(1{,}65 \leqslant X_1) \iff \left(\frac{1{,}65-1{,}5}{\sigma_1} \leqslant \frac{X-1-1{,}5}{\sigma_1}\right) \iff \left(\frac{0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z\right)$

Z suit la loi normale centrée et réduite.
On détermine en utilisant la calculatrice le nombre a tel que $P(a \leqslant Z) = 0{,}01$
On obtient a=2,3263.
Donc $\frac{0{,}15}{\sigma_1} = 2{,}3263 \iff \sigma_1 = \frac{0{,}15}{2{,}3263} =$ **0,063** à 10^{-3} près.

2.a. On choisit pour fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » : p=0,02.
$n = 250 \geqslant 30$; $np = 250 \times 0{,}02 = 5 \geqslant 5$; $n(1-p) = 205 \times 0{,}98 = 245 \geqslant 5$
On obtient pour intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0{,}02 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{250}} ; 0{,}02 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{250}}\right]$$

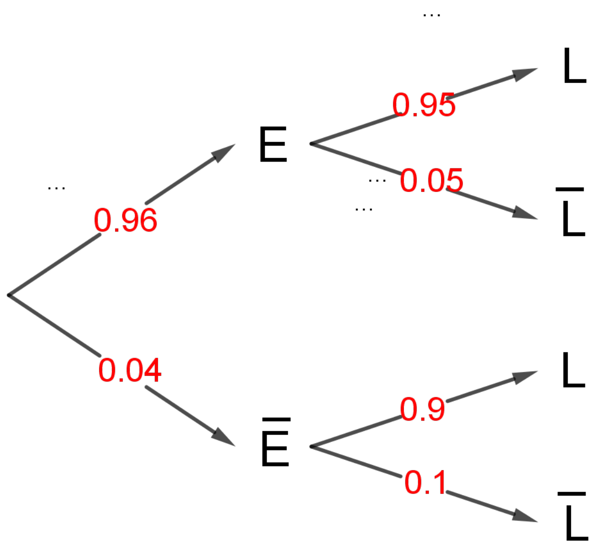
$1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{250}} = 0{,}017$ à 10^{-3} près.
$I = 50{,}02 - 0{,}017 ; 0{,}02 + 0{,}017] =$ **[0,003;0,037].**

2.b. La fréquence observée dans l'échantillon est : $\frac{10}{250} = 0{,}04 > 0{,}037$

Cette étant strictement supérieure à la borne supérieure de l'intervalle I, **on doit décider de réviser la machine.**

Partie B

1. L'énoncé précise :
- 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur « conforme » donc $P(E) = 0{,}96$
  Conséquence :
  $P(\bar{E}) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$
- Parmi les tubes e type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme donc
  $P_E(L) = 0{,}95$
  Conséquence :
  $P_E(\bar{L}) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.
- 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme donc
  $P(\bar{E} \cap L) = 0{,}036$.
  Conséquences :
  $P_{\bar{E}}(L) = \frac{P(\bar{E} \cap L)}{P(\bar{E})} = \frac{0{,}036}{0{,}04} = 0{,}9$
  et $P_{\bar{E}}(\bar{L}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.
  On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :

$P(L)=P(E+\text{¿}L)+P(\bar{E}\cap L)=P(E)\times P_E(L)+0{,}036=0{,}96\times 0{,}95+0{,}036=0{,}912+0{,}036$

P(L) = 0,948