EXERCICE 2 — 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Dans ce qui suit z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse.
Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z-1=\mathrm{i}(z+1)$ a pour solution $Z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Affirmation 2 : Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$

Affirmation 3 : Un point M d'affixe z tel que $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ appartient à la droite d'équation $y=-x$.

Affirmation 4 : L'équation $z^5+z-\mathrm{i}+1=0$ admet une solution réelle.

CORRECTION

Affirmation 1 : FAUSSE

justification

$z-\mathrm{i}=\mathrm{i}(z+1) \Leftrightarrow z-\mathrm{i}=\mathrm{i}z+\mathrm{i} \Leftrightarrow z-\mathrm{i}z=2\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\frac{2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=\mathrm{i}-1=-1+\mathrm{i}$

$|-1+\mathrm{i}|^2=(-1)^2+1^2=2 \qquad |-1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$

$\arg(-1+\mathrm{i})=\alpha\,(2\pi) \qquad \cos(\alpha)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha=\frac{3\pi}{4}\,(2\pi)$

$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\neq\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Affirmation 2 : FAUSSE

justification

. Première méthode

$1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}=1+\cos(2x)+\mathrm{i}\sin(2x)$

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1$

$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

$1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}=1+2\cos^2(x)-1+\mathrm{i}(2\sin(x)\cos(x))=2\cos(x)(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))=2\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq2\cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$

. Deuxième méthode

Pour tout nombre réel x : $1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

$1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$.

Or $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos(x)-\sin(x)$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=2\cos(x)$

$1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}=2\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq2\cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$

Affirmation 3 : VRAIE

Justification

$z=x+\mathrm{i}y$ x et y sont des nombres réels

$|z-\mathrm{i}|=|(z+1)| \Leftrightarrow |z-\mathrm{i}|^2=|z+1|^2 \Leftrightarrow |x+\mathrm{i}(y-1)|^2=|x+1+\mathrm{i}y|^2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x+1)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2+2x+1+y^2 \Leftrightarrow -2y=2x \Leftrightarrow y-x$

Affirmation 4 : FAUSSE

justification

$z^5z-\mathrm{i}+1=0 \Leftrightarrow z^5+z+1=\mathrm{i}$

Pour tout nombre réel z, on a z^5+z+1 qui est un nombre réel donc distinct de i.