

EXERCICE 3**6 points****Partie A : établir une inégalité**

Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout nombre réel de l'intervalle $[0; +\infty[$, $\ln(x+1) \leq x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2 .
- 2.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
2.b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 1$.
2.c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note L la limite de la suite (u_n) et on admet que $f(L) = L$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de L .
- 4.a. Écrire un algorithme, qui pour un naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p} .
4.b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15} .

CORRECTION
Partie A : établir une inégalité

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u} \quad (\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geq 0$$

f est croissante sur $]0; +\infty[$.

2. $f(0) = 0 - \ln(0+1) = -\ln(1) = 0$

Pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$:

$$f(0) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq x - \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq x$$

Partie B : application à l'étude d'une suite

1. $u_0 = 1 \quad u_1 = f(1) = 1 - \ln(2)$

$$u_2 = f(u_1) = 1 - \ln(2) - \ln(1 - \ln(2) + 1) = 1 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2)) = \mathbf{0,039} \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 0$.

. Initialisation :

$$u_0 = 1 \geq 0$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

. Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $u_n \geq 0$ et on doit démontrer que $u_{n+1} \geq 0$.

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(1 + u_n)$$

Or $u_n \geq 0$ et $u_n \geq \ln(1 + u_n)$ (résultat de la question 2 de la partie A)

$$\text{donc } u_{n+1} \geq 0$$

. Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq 0$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(1 + u_n) - u_n = -\ln(1 + u_n)$$

$$u_n \geq 0 \text{ donc } 1 + u_n \geq 1 \text{ et } \ln(1 + u_n) \geq \ln(1) = 0 \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0; +\infty[)$$

Conséquence :

$$u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n) \leq 0 \text{ et } \mathbf{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

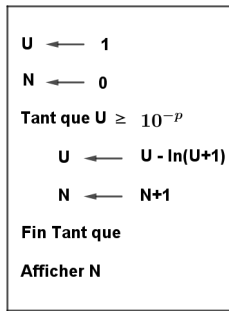
Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_0 = 1$.

2.c. Pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc **la suite (u_n) est convergente.**

$$3. L = f(L) \Leftrightarrow L = L - \ln(1+L) \Leftrightarrow \ln(1+L) = 0 \Leftrightarrow 1+L = e^0 = 1 \Leftrightarrow L = 0$$

4.a. p est un entier naturel donné.

Algorithme proposé :



Programmation en python (non demandée)

On demande initialement la valeur de p.

```
print('Début de programme')
print("Veuillez donner un entier naturel")
a=input()
p=int(a)
b=-p
print("p="+str(p))
N=0
U=1
from math import*
while U>=10**b:
    N=N+1
    U=U-log(U+1)
print("n="+str(N))
```

4.b. En utilisant l’algorithme on obtient N=6.

N	U
0	1
1	0.307
2	0.039
3	0.007
4	2.81 E-7
5	3.95 E-14
6	4.94 E-17

En utilisant la programmation en python on obtient.

```
.....
Début de programme
Veuillez donner un entier naturel
15
p=15
n=6
.
```