EXERCICE 3 6 points

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x)=x-\ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. En déduire que pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, $\ln(x+1)\leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n-\ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2 .

2.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 0$.

2.b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 1$.

2.c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On note L la limite de la suite (u_n) et on admet que $f(L)=L$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de L.

4.a. Écrire un algorithme, qui pour un naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p} .

4.b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15} .

CORRECTION

Partie A : établir une inégalité

1. f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\quad(\ln(x+1))'=\frac{1}{x+1}$

$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}\geqslant 0$

f est croissante sur $[0;+\infty[$.

2. $f(0)=0-\ln(0+1)=-\ln(1)=0$

Pour tout nombre réel x de $[0;+\infty[$:

$f(0)\leqslant f(x) \Leftrightarrow 0\leqslant x-\ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x+1)\leqslant x$

Partie B : application à l'étude d'une suite

1. $u_0=1$ $\quad u_1=f(1)=1-\ln(2)$

$u_2=f(u_1)1-\ln(2)-\ln(1-\ln(2)+1)=1-\ln(2)-\ln(2-\ln(2))$ = **0,039** à 10^{-3} près.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geqslant 0$.

. Initialisation :

$u_0=1\geqslant 0$

La propriété est vérifiée pour n=0.

. Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant 0$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant 0$.

$u_{n+1}=f(u_n)=u_n-\ln(1+u_n)$

Or $u_n\geqslant 0$ et $u_n\geqslant \ln(1+u_n)$ (résultat de la question 2 de la partie A)

donc $u_{n+1}\geqslant 0$

. Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n on a : $u_n\geqslant 0$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}-u_n=u_n-\ln(1+u_n)-u_n=-\ln(1+u_n)$

$u_n\geqslant 0$ donc $1+u_n\geqslant 1$ et $\ln(1+u_n)\geqslant \ln(1)=0$ (car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$)

Conséquence :

$u_{n+1}-u_n=-\ln(1+u_n)\leqslant 0$ et **la suite (u_n) est décroissante.**

Pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant u_0=1$.

2.c. Pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 0$ et la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc **la suite (u_n) est convergente.**

3. $L=f(L) \Leftrightarrow L=L-\ln(1+L) \Leftrightarrow \ln(1+L)=0 \Leftrightarrow 1+L=e^0=1 \Leftrightarrow L=0$

4.a. **p** est est un entier naturel donné.

Algorithme proposé :

```
U ← 1
N ← 0
Tant que U ≥ 10^(-p)
    U ← U - ln(U+1)
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

<u>Programmation en python</u> (non demandée)
On demande initialement la valeur de p.

```
print('Début de programme')
print("Veuillez donner un entier naturel")
a=input()
p=int(a)
b=-p
print("p="+str(p))
N=0
U=1
from math import*
while U>=10**b:
    N=N+1
    U=U-log(U+1)
print("n="+str(N))
```

4.b. En utilisant l'algorithme on obtient N=6.

N	U
0	1
1	0.307
2	0.039
3	0.007
4	2.81 E-7
5	3.95 E-14
6	4.94 E-17

En utilisant la programmation en python on obtient.

```
Début de programme
Veuillez donner un entier naturel
15
p=15
n=6
```