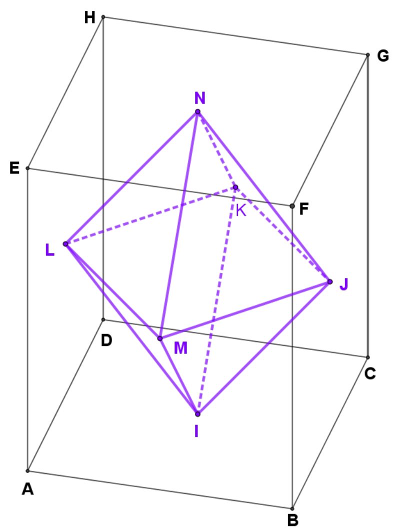
EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme la figure ci-dessous.



Lus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (M L) sont orthogonales.

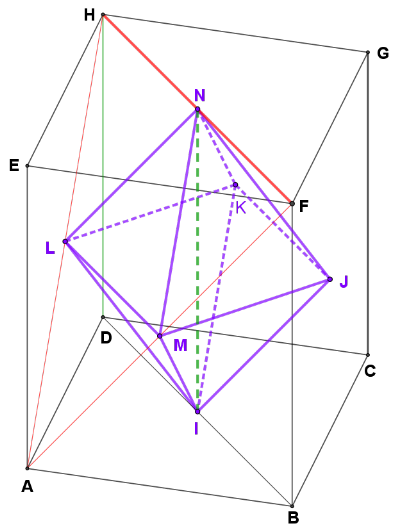
Dans la suite, on considère le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

2.a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.
2.b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.
2.c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

3.a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x-y+z=1$.
3.b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.
3.c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite obtenue en utilisant deux points de la figure.

CORRECTION

1.



- Dans le triangle HAF, L est le milieu de [AH] et M est le milieu de [AF], le théorème des milieux nous permet d'affirmer que les droites (LM) et (HF) sont parallèles.
- Dans le rectangle HFBD, N est le milieu de [HF] et I est le milieu de [BD] donc les droites (IN) et (HD) sont parallèles.
- ABCDEFGH est un cube donc l'arête [DH] est perpendiculaire à la face (ABCD) donc perpendiculaire à droite (HF).
- (LM) et (HF) sont parallèles à deux droites perpendiculaires donc **(LM) et (HF) sont orthogonales.**

2.a. $N(0,5;0,5;1)$ $\quad C(1;1;0)$ $\quad \overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix}$ $\quad M(0,5;0;0,5)$ $\quad L(0;0,5;0,5)$ $\quad \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$

2.b. $\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{ML}=0,5\times(-0,5)+0,5\times0,5+(-1)\times0=-0,25+0,25=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont orthogonaux donc **les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.**

2.c. Les droites (ML) et (NI) sont orthogonales et les droites (ML) et (NC) sont orthogonales et les points N, I et C ne sont pas alignés donc (ML) est perpendiculaire au plan (NCI) et $\overrightarrow{ML}$ est un vecteur normal au plan (NCI).

$R(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{CL}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$

$R(x;y;z)$ appartient au plan (NCI) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CR}.\overrightarrow{ML}=0$ $\Leftrightarrow$ $(x-1)\times(-0,5)+(y-1)\times0,5+z\times0=0$

$\Leftrightarrow$ $-0,5x+0,5+0,5y-0,5=0$ $\Leftrightarrow$ $-0,5x+0,5y=0$ $\Leftrightarrow$ $x-y=0$

(NCI) : x-y = 0

3.a. Il suffit de vérifier que les coordonnées des points N ; J et M sont des solutions de l'équation : $x-y+z=1$.

$N(0,5;0,5;1)$ $\quad 0,5-0,5+1=1$

$J(1;0,5;0,5)$ $\quad 1-0,5+0,5=1$

$M(0,5;0;0,5)$ $\quad 0,5-0+0,5=1$

donc **x-y+z = 1 est une équation cartésienne du plan (NJM).**

3.b. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (NJM).

$D(0;1;0)$ $\quad F(1;0;1)$ $\quad \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

<u>Conséquence</u>

$\vec{n} = \overrightarrow{DF}$ et **la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NJM).**

3.c. Pour déterminer l'intersection des plans (NJM) et (NCI), on résout le système :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{t décrit } \mathbb{R}$$

L'intersection des plans (NJM) et (NCI) est la droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et passant par le point E(0;0;1).

Pour t = 0 on obtient le point $E(0;0;1)$, pour t = 0,5 on obtient le point $N(0{,}5;0{,}5;1)$ et pour t = 1 on obtient le point $G(1;1;1)$.

$(\Delta) = (EN) = (NG) = (EG)$.