EXERCICE 1 6 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.
Le roller de vitesse est un sport qui consiste à parcourir une certaine distance le plus rapidement possible en rollers. Dans un but de faire des économies, un club de roller de vitesse s'intéresse à la gestion de ses chronomètres et des roulements de ses rollers.

Partie A :
On note T la variable aléatoire égale à la durée de vie , en mois , d'un chronomètre et on admet qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}0555$.

1. Calculer la durée de vie moyenne d'un chronomètre (arrondie à l'unité).
2. Calculer la probabilité qu'un chronomètre ait une durée de vie comprise entre un et deux ans.
3. Un entraîneur n'a pas changé son chronomètre depuis deux ans. Quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de fonctionner au moins un an de plus ?

Partie B :
Ce club fait des commandes groupées de roulements pour ses adhérents auprès de deux fournisseurs A et B.
. Le fournisseur A propose des tarifs plus élevés mais les roulements qu'il vend sont sans défaut avec une probabilité de 0,97.
. Le fournisseur B propose des prix plus avantageux mais ses roulements sont défectueux avec la probabilité de 0,05.
On choisit au hasard un roulement dans le stock du club et on considère les événements :
A : « le roulement provient du fournisseur A »,
B : « le roulement provient du fournisseur B »,
D : « le roulement est défectueux ».

1. Le club achète 40 % de ses roulements chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.
1.a. Calculer la probabilité que le roulement provienne du fournisseur A et soit défectueux.
1.b. Le roulement est défectueux . Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.
2. Si le club souhaite que mois de 3,5 % des roulements soient défectueux, quelle proportion minimale de roulements doit-il commander au fournisseur A ?

Partie C :
Le diamètre intérieur standard d'un roulement sur une roue de roller est de 8 mm.
On note X la variable aléatoire donnant en mm le diamètre d'un roulement et on admet que X suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart-type 0,1.
Un roulement est dit conforme si son diamètre est compris entre 7,8 mm et 8,2 mm.

1. Calculer la probabilité qu'un roulement soit conforme.
2. Le fournisseur B vend ses roulements par lots de 16 et affirme que seulement 5 % de ses roulements sont non conformes.
Le président du club, qui lui a acheté 30 lots, constate que 38 roulements sont non conformes.
Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur B ?
On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
3. Le fabricant de roulements de ce fournisseur décide d'améliorer la production de ses roulements. Le réglage de la machine qui les fabrique est modifié de sorte que 96 % des roulements soient conformes.
On suppose qu'après réglage la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart-type σ
3.a. Quelle est la loi suivie par $\dfrac{X-8}{\sigma}$?
3.b. Déterminer σ pour que le roulement fabriqué soit conforme avec une probabilité égale à 0,96.

CORRECTION

Partie A

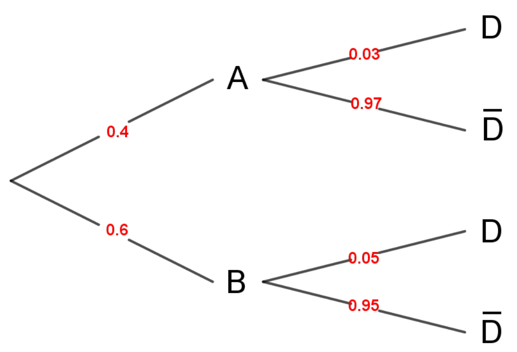
1. T est une variable aléatoire de durée de vie suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}0555$.
La durée de vie moyenne est : $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}0555}$ = **18 mois** (arrondi à l'unité)

2. La fonction de densité de probabilité de la variable T est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ et la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t)=-e^{-\lambda t}$ est une une primitive de f sur $[0;+\infty[$ donc :
$P(12\leqslant T\leqslant 24)=\int_{12}^{24} f(t)\,dt=F(24)-F(12)=-e^{-24\times 0{,}0555}+e^{-12\times 0{,}0555}=e^{-0{,}666}-e^{-1{,}332}=$ **0,250** *arrondi à* 10^{-3}

3. Une loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement donc :
$P_{(24\leqslant T)}(36\leqslant T)=P(36-24\leqslant T)=P(12\leqslant T)=1-P(T\leqslant 12)=e^{-12\times 0{,}0555}=e^{-0{,}666}=$ **0,514** *arrondi à* 10^{-3}

Partie B

1. Le club achète 40 % de ses roulements chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B donc :
$P(A)=0{,}4$ et $P(B)=1-P(A)=0{,}6$.
. Les roulements vendus par le fournisseur A sont sans défaut avec une probabilité de 0,97, donc :
$P_A(\bar{D})=0{,}97$ et $P_A(D)=0{,}03$.
. Les roulements vendus par le fournisseur B sont défectueux avec une probabilité de 0,05, donc :
$P_B(D)=0{,}05$ et $P_B(\bar{D})=0{,}95$.
. On obtient l'arbre pondéré suivant :



1.a. En utilisant l'arbre pondéré, on obtient :
$P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)=0{,}4\times 0{,}03=$ **0,012**

1.b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :
$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)$
$P(B\cap D)=P(B)\times P_B(D)=0{,}6\times 0{,}05=0{,}03$
$P(D)=0{,}012+0{,}03=0{,}042$
$P_D(B)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}03}{0{,}042}=$ **0,714** *arrondi à* 10^{-3}

2. On note p la probabilité qu'un roulement soit commandé au fournisseur A et 1-p est la probabilité qu'un roulement soit commandé au fournisseur B.
$P(D)=p\times 0{,}03+(1-p)\times 0{,}05=0{,}05-0{,}02p$.
On veut que $P(D)\geqslant 0{,}035 \Leftrightarrow 0{,}05-0{,}02p\geqslant 0{,}035 \Leftrightarrow 0{,}015\geqslant 0{,}02p \Leftrightarrow \frac{0{,}015}{0{,}02}=\frac{15}{20}=0{,}75\geqslant p$
La valeur minimale de p est 0,75 pour que moins de 3,5 % des roulements soient défectueux.
La proportion minimale des roulements achetés au fournisseur A est 75 %.

Partie C

1. X suit la loi normale d'espérance $\mu=8$ et d'écart-type $\sigma=0,1$.
Le roulement est conforme si et seulement si $(7,8\leqslant X\leqslant 8,2)$.
En utilisant la calculatrice, on obtient $P(7,8\leqslant X\leqslant 8,2)$ = **0,955.**
On peut remarquer que l'on a : $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)$.

2. Le fournisseur B affirme que la probabilité qu'un roulement soit défectueux est $p=0,05$.
Le président du club a acheté $30\times 16=480$ roulements.
$n=480\geqslant 30$ et $np=0,05\times 480=24\geqslant 5$ et $n(1-p)=0,95\times 480=456\geqslant 5$.
On considère l'intervalle de fluctuationasymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\left[p-1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p+1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=\left[0,05-1,96\times\sqrt{\frac{0,05\times 0,95}{480}};0,05+1,96\times\sqrt{\frac{0,05\times 0,95}{480}}\right]$$

$1,96\times\sqrt{\dfrac{0,05\times 0,95}{480}}=0,019$ *arrondi à* 10^{-3} .

I=[0,05-0,019;0,05+0,019]=[0,031;0,069]

La fréquence de roulement défectueux constaté dans l'échantillon de taille 480 est : $f=\dfrac{38}{480}=0,079$.

0,079 n'appartient pas à I.
Ce contrôle remet en cause l'affirmation du fournisseur au seuil de 95 %.

3.a. La variable aléatoire $Y=\dfrac{X-8}{\sigma}$ suit **la loi normale centrée et réduite.**

3.b. $7,8\leqslant X\leqslant 8,2 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{-0,2}{\sigma}\leqslant Y\leqslant\dfrac{0,2}{\sigma}$

$P(7,8\leqslant X\leqslant 8,2)=0,96 \quad\Leftrightarrow\quad P\left(-\dfrac{0,2}{\sigma}\leqslant Y\leqslant\dfrac{0,2}{\sigma}\right)=0,96$

donc $P\left(Y\leqslant-\dfrac{0,2}{\sigma}\right)=P\left(\dfrac{0,2}{\sigma}\leqslant Y\right)=\dfrac{1-0,96}{2}=0,02$

En utilisant la calculatrice, on détermine le nombre a tel que $P(a\leqslant Y)=0,96$, on obtient $a=2,0537$.

$\dfrac{0,2}{\sigma}=2,0537 \quad\Leftrightarrow\quad \sigma=\dfrac{0,2}{2,0537}$ = **0,097** *arrondi à* 10^{-3} .