EXERCICE 2 — 5 points

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.
Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2{,}5\ \mu g/mL$.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue.
En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante : $f(t)=3te^{-\frac{1}{4}t}+2$ avec $t\geqslant 0$ où f(t) représente le taux de vasopressine (en µg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé depuis le début d'une hémorragie.

1.a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant t=o ?
1.b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
1.c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif, $f'(t)=\frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}$.

3.a. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f (incluant la limites en $+\infty$).
3.b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
Quel est alors ce taux ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4.a. Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à [0;4] telle que $f(t_0)=2{,}5$.
En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 *appartenant à* $[4;+\infty[$ *vérifiant* $f(t_1)=2{,}5$.
On donne une valeur approchée de t_1 *à* 10^{-3} *près :* $t_1=18{,}930$.

4.b. Déterminer combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 µg/mL dans le sang.

5. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t)=-12(t+4)e^{-\frac{1}{4}t}+2t$.
5.a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f est en déduire une valeur approchée de $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$ à l'unité près.
5.b. En déduire une valeur approchée à $0{,}1$ près du taux moyen de vasopressine lors d'un accident durant la période où ce taux est supérieur à 2,5 µg/mL.

CORRECTION

1. $f(t)=3te^{-\frac{1}{4}t}+2$ avec $t\geqslant 0$.

1.a. $f(0)=3\times 0\times e^{0}+2=$ **2**

1.b. 12 secondes correspond à $\frac{1}{5}$ de minute soit 0,2 minute.

$f(0{,}2)=3\times 0{,}2\times e^{-0{,}05}+2=2{,}571$ à 10^{-3} près.

$2{,}571>2{,}5$ donc **douze secondes après l'hémorragie, le taux de vasopressine n'est pas normal.**

1.c. $te^{-\frac{1}{4}t}=te^{-0{,}25t}=\frac{t}{e^{0{,}25t}}=4\times\frac{0{,}25t}{e^{0{,}25t}}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}(0{,}25t)=+\infty \qquad \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{e^{T}}{T}=+\infty$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{0{,}25t}}{0{,}25t}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{0{,}25t}{e^{0{,}25t}}=0$.

Conséquence

$\lim\limits_{t\to+\infty}3te^{-\frac{1}{4}t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=2$.

La droite d'équation $y=2$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

À long terme, le taux de vasopressine devient voisin de 2.

2. $(e^{u})'=u'e^{u} \qquad \left(e^{-\frac{1}{4}t}\right)'=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}$

$f'(t)=3\times 1\times e^{-\frac{1}{4}t}+3t\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\right)=\left(3-\frac{3}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}t}=\frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}$

3.a. Pour tout nombre réel t positif ou nul $e^{\frac{1}{4}t}>0$ donc le signe de $f(t)$ est le signe de (4-t).

Si $0\leqslant t<4$ alors $f'(t)>0$ et f est strictement croissante sur [0;4[.

Si $4<t$ alors $f'(t)<0$ et f est strictement décroissante sur $]4;+\infty[$

Tableau de variation

t	0	4	$+\infty$
f '(t)		0	
f(t)	2 ↗	M	↘ 2

3.b. Le taux de vasopressine est maximal pour $x=4$ est $M=f(4)=$ **6,41** à 10^{-2} près.

4.a. La fonction f est continue et strictement croissante sur [0;4], f(0)=2 et f(4)=6,41, 2,5 appartient à l'intervalle [2;6,41] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre réel t_0 tel que $f(t_0)=2{,}5$.

En utilisant la calculatrice, on obtient $0{,}174<t_0<0{,}175$ et $t_0=$ **0,174** à 10^{-3} près.

4.b. La fonction f est strictement croissante sur $[0;4]$ et $t_0=0{,}174$.

Si $t_0<t\leqslant 4$ alors $f(t_0)=2{,}5<f(t)$

La fonction f est strictement décroissante sur $[4;+\infty[$ et $t_1=18{,}93$.

Si $4\leqslant t<t_1$ alors $f(t)>f(t_1)=2{,}5$.

Conséquence

$f(t)>2{,}5 \Leftrightarrow t_0<t<t_1$

$t_1-t_0=18{,}93-0{,}174=18{,}716$

716 millième de minute correspond à $\frac{60\times 716}{1000}=43$ secondes à l'unité près.

Conclusion

Le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 µg/mL dans le sang pendant 18 min 43s.

5.a. F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$$F'(t)=-12\times 1\times e^{-\frac{1}{4}t}-12(t+4)\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\right)+2=-12e^{-\frac{1}{4}t}+3(t+4)e^{-\frac{1}{4}}+2$$

$$F'(t)=(-12+3t+12)e^{-\frac{1}{4}t}+2=3te^{-\frac{1}{4}}+2=f(t)$$

F est une primitive de f ur $[0;+\infty[$.

Donc $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = F(t_1)-F(t_0)$

$F(t_1)=-12(t_1+4)e^{-\frac{1}{4}t_1}+2t_1=35{,}4374$ à 10^{-4} près

$F(t_0)=-12(t_0+4)e^{-\frac{1}{4}t_0}+2t_0=-47{,}6079$ à 10^{-4} près

$\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt =$ **83,0453** à 10^{-4} près.

5.b. $\mu=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt =$ **4,4** à 0,1 près.