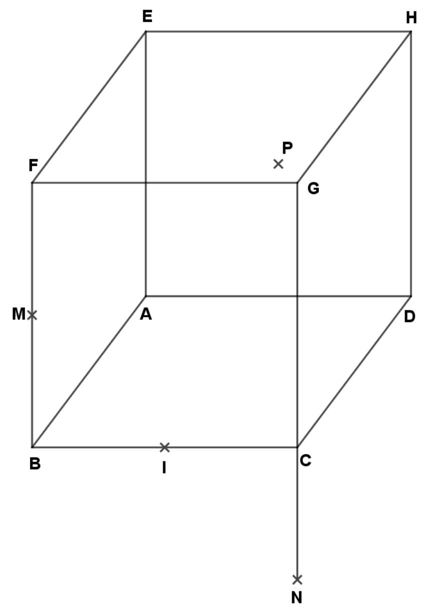
EXERCICE 3 4 points

On considère un cube ABCDEFGH.

Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N estdéfini par la relation $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ et le point P est le centre de la face ADHE.



Partie A :

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.

2. Construire sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par G et orthogonale au plan (MNP).

3. Montrer que la droite (d) coupe le plan (MNP) au point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

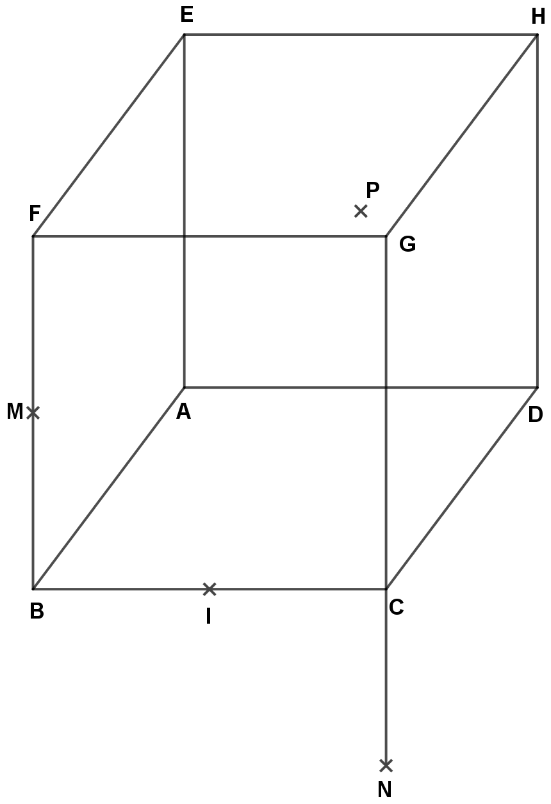
En déduire la distance GK.

4. On admet que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires et que l'aire du quadrilatère MEDI est $\frac{9}{8}$ unité d'aire.

Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

ANNEXE

À compléter et à remettre avec la copie



CORRECTION

Partie A :

1. M est le milieu du segment [FB] donc $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$. On a aussi $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{GC}$.

Conséquence

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CN}$ et le quadrilatère MBNC est un parallélogramme.

Les diagonales de MBNC se coupent en leur milieu donc **la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu.**

2. M est le milieu de [BF] et I est le milieu de [BC] donc la droite (MI) est parallèle à la droite (FC).

ABCDEFGH est un cube donc les droites (FC) et (DE) sont parallèles.

P est le milieu de [DE].

Conséquence

L'intersection du plan (MNP) et de la face du cube AEHD est le segment [DE].

La section du cube par le plan (MNP) est le quadrilatère MIDE.

Ce quadrilatère est un trapèze isocèle.

On trace cette section sur la figure de la feuille annexe.

Partie B :

$(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

On donne les coordonnées de tous les points de la figure.

A(0;0;0) B(1;0;0) C(1;1;0) D(0;1,0) E(0;0;1) F(1;0;1) G(1;1;1) H(0:1;1)

M(1;0;0,5) I(1;0,5;0) P(0;0,5;0,5) N(1;1;-0,5)

1. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (MNP) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan par exemples : $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$.

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{MN}=1\times0+2\times1+2\times(-1)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{MP}=1\times(-1)+2\times0,5+2\times0=0$

$\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan (MNP).**

. Le plan (MNP) est le plan passant par M et de vecteur normal $\vec{n}$.

Q(x;y;z) appartient au plan (MNP) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{MQ}=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-0,5\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{MQ}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)+2\times(y-0)+2\times(z-0,5)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-2=0$

(MNP) : x+2y-2z-2=0

2. (d) est la droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{n}$.

(d) : $\begin{cases}x=1\times t+1\\y=2\times t+1\\z=2\times t+1\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

3. Pour déterminer l'intersection du plan (MNP) et de la droite (d), on résout le système :

$$\begin{cases} x+2y+2z-2=0 \\ x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=2t+1 \end{cases}$$

On obtient :

$$t+1+2(2t+1)+2(2t+1)-2=0 \Leftrightarrow t+4t+4t+1+2+2-2=0 \Leftrightarrow 9t+3=0 \Leftrightarrow t=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

$$x=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3} \qquad y=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3} \qquad z=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$$

$K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ est le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite (d)

$GK^2=\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\left[\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=1$ donc **GK=1.**

4. Le quadrilatère MEDI est contenu dans le plan (MNP).

$A_{MEDI}=\frac{9}{8}$ GK est lahauteur de la pyramide issue de G.

V est le volume de la pyramide GMEDI en unité de volume.

$V=\frac{1}{3}\times A_{MEDI}\times GK=\frac{3}{8}$ unité de volume.

ANNEXE