EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) définie définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 = 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que,pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Justifier que la suite converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1.a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
1.b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
u ←— 5
n ←— 0
Tant que  u ≥ 1.01
n ←— n + 1
u ←— 3 − 10/(u + 4)
Fin Tant que
```

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?

2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

CORRECTION

1. $u_1=3-\frac{10}{9}=\frac{17}{9}$ $\quad u_2=3-\frac{10}{\frac{17}{9}+4}=3-\frac{90}{53}=\frac{159-90}{53}=\frac{69}{53}$

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geqslant 1$.

Initialisation

$u_0=5\geqslant 1$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant 1$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant 1$.

Or $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}-1=2-\frac{10}{u_n+4}=\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}=\frac{2u_n-2}{u_n+4}=\frac{2(u_n-1)}{u_n+4}$

On a : $u_n\geqslant 1$ donc $u_n-1\geqslant 0$ et $u_n+4>0$ et $u_{n+1}-1\geqslant 0$ soit $u_{n+1}\geqslant 1$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 1$.

3. $u_{n+1}-u_n=3-\frac{10}{u_n+4}-u_n=\frac{3u-n+12-10-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$.

Or $(1-u_n)(u_n+2)=-u_n^2+u_n+2-3u_n=-u_n^2-u_n+2$

Conséquence

$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 1$ donc $u_n+4>0$ et $u_n+2>0$ et $1-u_n\leqslant 0$ et $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc **la suite (u_n) est convergente.**

Partie B :

1.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{3-\frac{10}{u_n+4}-1}{3-\frac{10}{u_n+4}+2}=\frac{2(u_n+4)-10}{5(u_n+4)-10}=\frac{2u_n+8-10}{5u_n+20-10}=\frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}=\frac{2}{5}\times\frac{u_n-1}{u_n+2}=\frac{2}{5}v_n$$

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q=\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=\frac{4}{7}$.

1.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=\frac{4}{7}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{5}v_n-v_n=-\frac{3}{7}v_n<0$

La suite (v_n) est décroissante et $v_0=\frac{4}{7}<1$ donc pour tout entier naturel n, on a $v_n<1$ et $v_n\neq 1$.

2. Pour tout entier naturel n :

$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ $\Leftrightarrow$ $u_nv_n+2v_n=u_n-1$ $\Leftrightarrow$ $2v_n+1=u_n(1-v_n)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{2v_n+1}{1-v-n}=u_n$

$0\leqslant\frac{2}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

Conséquence

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2\times 0+1}{1-0} = \mathbf{1.}$

Partie C

1. On peut utiliser l'algorithme pas à pas (remarque : on utilise alors des valeurs approchées).
On obtient :
$u_5 = 1{,}018$ à 10^{-3} près
$u_6 = 1{,}070$ à 10^{-3} près
donc **$n = 6$.**
On propose un programme python pour obtenir ce résultat.
Programme

```
print('Début de programme')
u=5
n=0
while u>=1.01:
    n=n+1
    u=3-10/(u+4)
    print("n="+str(n),"u="+str(u))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
n=1 u=1.8888888888888888
n=2 u=1.3018867924528303
n=3 u=1.113879003558719
n=4 u=1.044537230340988
n=5 u=1.0176576079459236
n=6 u=1.0070381876666759
Fin de programme
```

Remarque

On a aussi : $u_n = \dfrac{8\times 0{,}4^n+7}{7-4\times 0{,}4^n}$ par balayage on obtient le résultat précédent.

2. (u_n) est une suite décroissante , on obtient alors **la valeur minimale de n pour laquelle** $u_n < 1{,}01$.