EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A :

Soient a et b deux entiers naturels tel que $a > b$.

1. Démontrer que PGCD(a,b)=PGCD(a-b,b).
2. En utilisant l'égalité précédente, calculer PGCD(4^3 -1, 4^2 -1).
3. Compléter l'algorithme fourni en annexe de telle sorte qu'après exécution, la variable A contienne PGCD(4^3 -1, 4^2 -1).

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$.
On admettra que pour tout entier naturel non nul, u_n est un entier naturel non nul.

On note $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=AV_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 dont on Précisera les coefficients.

2. On pose P= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.a. Justifier que P est inversible et donner P^{-1} .

2.b. Vérifier que $P^{-1}AP$ est matrice diagonale D= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $A^n=PD^nP^{-1}$

4. Soit un entier naturel non nul. Calculer les coefficients de la matrice A^n .

5. On admettra que pour tout entier naturel n non nul, $V_n=A^nV_0$.

Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 4^n$.

6.a. Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=4u_n+1$.

6.b. En déduire $\text{PGCD}(u_{n+1}, u_n)$ pour tout entier naturel n.

6.c. Déterminer pour tout entier naturel n, $\text{PGCD}(4^{n+1}-1;4^n-1)$.

ANNEXE

```
A ⟵ 4^3 − 1
B ⟵ 4^2 − 1
Tant que ..... :
   Si A>B alors:
         A ⟵ .....
   Sinon:
         B ⟵ .....
   Fin Si
Fin Tant que
```

CORRECTION

Partie A :

1. a et b sont des entiers naturels tel que a>b.
Tout diviseur commun de a et b est un diviseur commun de a-b et b.
Tout diviseur commun de a-b et b est un diviseur commun de a-b+b=a et b.
L'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à a-b et b.
Conséquence
PGCD(a,b)=PGCD(a-b,b)

2. PGCD$(4^3-1,4^2-1)$ =PGCD(63,15)=PGCD(63-15,15)=PGCD(48,15)=PGCD(48-15,15)=PGCD(33,15)
=PGCD(33-15,15)=PGCD(18,15)=PGCD(18-15,15)=PGCD(3,15)=PGCD(15,3)= PGCD(15-3,3)
=PGCD(12,3)=PGCD(12-3,3)=PGCD(9,3)=PGCD(9-3,3)=PGCD(6,3)=PGCD(6-3,3)=PGCD(3,3)= 3.

3.

```
A ← 4^3 − 1
B ← 4^2 − 1
Tant que A≠B:
   Si A>B alors:
         A ← A-B
   Sinon:
         B ← B-A
   Fin Si
Fin Tant que
```

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n

$$V_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5u_{n+1}-4u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-4\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}=AV_n$$

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\1&0\end{pmatrix}$$

2.a. $\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a+4c=1\\a+c=0\\b+4d=0\\b+d=1\end{cases}$

On obtient : $b=-a$ et $-3a=1$ donc $a=-\frac{1}{3}$ et $c=\frac{1}{3}$

$b=-4d$ et $-3d=1$ donc $d=-\frac{1}{3}$ et $b=\frac{4}{3}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

P est inversible et $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4\\1&-1\end{pmatrix}$

2,b. $P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-4\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&16\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PD^n P^{-1}$.

Initialisation

Pour $n=1$.

En utilisant le résultat de la question précédente, on a : $P^{-1}AP = D$ donc $AP = PD$ et $A = PDP^{-1}$ soit $A^1 = PD^1 P^{-1}$.

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $A^n = PDP^{-1}$ et on doit démontrer que $A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$.

Or $A^{n+1} = A^n A = (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n D P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PD^n P^{-1}$.

4. On peut facilement justifier par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, non nul on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

$$A^n = PD^n P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4^n & -4^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+4^{n+1} & 4-4^{n+1} \\ -1-4^n & 4-4^n \end{pmatrix}$$

5. On admet que pour tout entier naturel n non nul : $V_n = A^n V_0$.

$$\text{Or } V_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+4^{n+1} & 4-4^{n+1} \\ -1+4^n & 4-4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+4^{n+1} \\ -1+4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

donc $u_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 4^n$.

6.a. Pour tout entier naturel n

$$4u_n + 1 = 4 \times \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 4^n\right) + 1 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \times 4^{n+1} + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 4^{n+1} = u_{n+1}.$$

6.b. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - 4u_n = 1$.

Le théorème de Bezout nous permet d'affirmer que u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

Donc $PGCD(u_{n+1}, u_n) = 1$.

6.c. Pour tout entier naturel n :

$u_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 4^n$ donc $3u_n = 4^n - 1$

$PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1) = PGCD(3u_{n+1}, 3u_n) = 3 \times PGCD(u_{n+1}, u_n) =$ **3.**