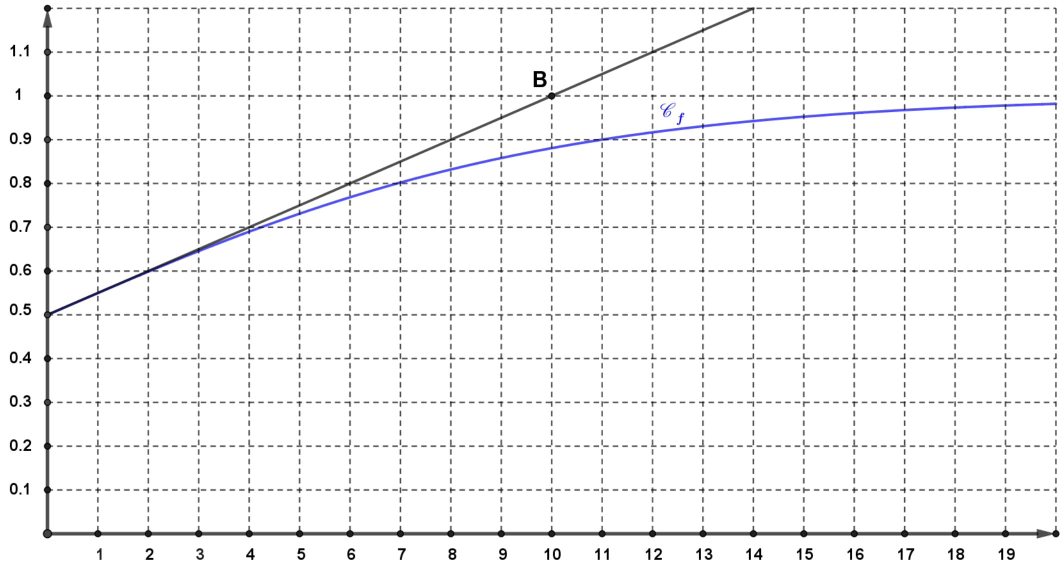
## EXERCICE 1 — 6 points

**Partie A**

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{a}{1+e^{-bx}}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0;0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10;1).




**1.** Justifier que a = 1.

On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-bx}}$.

**2.** On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x)=\dfrac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$.

**3.** En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

**Partie B**

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est mobilisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par : $p(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}$.

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre p(x) modélise la proportion d'individus équipés arès x années.
Ainsi, pour ce modèle, p(0) est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et p(3,5) est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

**1.** Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ?
On en donnera une valeur arrondie au centième.

**2.a.** Déterminer le sens de variation de la fonction $p$ sur $[0;+\infty[$.
**2.b.** Calculer la limite de la fonction $p$ en $+\infty$.
**2.c.** Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

**3.** On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

**4.** On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par :

$$m=\frac{1}{2}\int_{8}^{10} p(x)\,\mathrm{d}x .$$

**4.a.** Vérifier que, pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$p(x)=\frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}} .$$

**4.b.** En déduire une primitive de la fonction $p$ sur $[0;+\infty[$.
**4.c.** Déterminer la valeur exacte de $m$ et son arrondi au centième.

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** La courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, passe par le point A(0;0,5) donc f(0) = 0,5.

Or $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{-bx}}$ donc $f(0)=\dfrac{a}{1+e^{0}}=\dfrac{a}{2}$

$f(0)=0,5 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{a}{2}=0,5 \quad\Leftrightarrow$ **a = 1**

et $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-bx}}$

**2.** $(e^{u})'=u'e^{u} \qquad (e^{-bx})'=-b\,e^{-bx}$ et $(1+e^{-bx})'=-b\,e^{-bx}$

On dérive l'inverse d'une fonction.

$f'(x)=\dfrac{-(-b\,e^{-bx})}{(1+e^{-bx})^2}=\dfrac{b\,e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$.

**3.** La droite (AB) est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A(0;0,5) donc $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

$m=\dfrac{1-0,5}{1-0}=\dfrac{0,5}{10}=0,05$

$f'(0)=\dfrac{b\,e^{0}}{(1+e^{0})^2}=\dfrac{b}{4}$

donc $\dfrac{b}{4}=0,05 \quad\Leftrightarrow$ **b = 0,2**

et $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}$

**Partie B**

**1.** La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 est égale à p(10).

$p(10)=\dfrac{1}{1+e^{-2}}$ = **0,88 au centième près.**

**2.a.** Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0;+\infty[$ $\;p(x)=\dfrac{0,2\,e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}>0$

donc **p est strictement croissante sur** $[0;+\infty[$ **.**

**2.b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,2x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{\overline{0,2x}}}=\dfrac{1}{1+0}=1$ .

**2.c.** **Dans un avenir lointain presque tous les individus de la population seront équipés.**

**3.** $p(x)\geqslant 0,95 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}\geqslant 0,95 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{0,95}\geqslant 1+e^{-0,2x} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{0,05}{0,95}\geqslant e^{-0,2x} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{19}\geqslant e^{-0,2x}$

La fonction ln est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\Leftrightarrow\quad \ln\left(\dfrac{1}{19}\right)\geqslant \ln(e^{-0,2x}) \quad\Leftrightarrow\quad -\ln(19)\geqslant -0,2x \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{-\ln(19)}{-0,2}\leqslant x \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{\ln(19)}{0,2}\leqslant x$

$\dfrac{\ln(19)}{0,2}=14,72$ à $10^{-2}$ près.

**Le marché est donc saturé au cours de l'année 2014.**

**4.a.** $p(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}=\dfrac{1\times e^{0,2x}}{(1+e^{-0,2x})\times e^{0,2x}}=\dfrac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}+e^{0}}=\dfrac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$

**4.b.** $u(x)=1+e^{0,2x}$ $\quad u'(x)=0,2\,e^{0,2x}$

$p(x)=\dfrac{1}{0,2}\times\dfrac{0,2\,e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}=\dfrac{1}{0,2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}=5\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc la fonction $P$ définie sur $[0;+\infty[$ par $P(x)=5\times\ln(u(x))=5\times\ln(1+e^{0,2x})$ est une primitive de $p$.

**4.c.** $m=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_8^{10}p(x)\,dx$

$\displaystyle\int_8^{10}p(x)\,dx=P(10)-P(8)=5\ln(1+e^{2})-5\ln(1+e^{1,6})$

$m=2,5(\ln(1+e^{2})-\ln(1+e^{1,6}))$ = **0,86 à** $10^{-2}$ **près.**