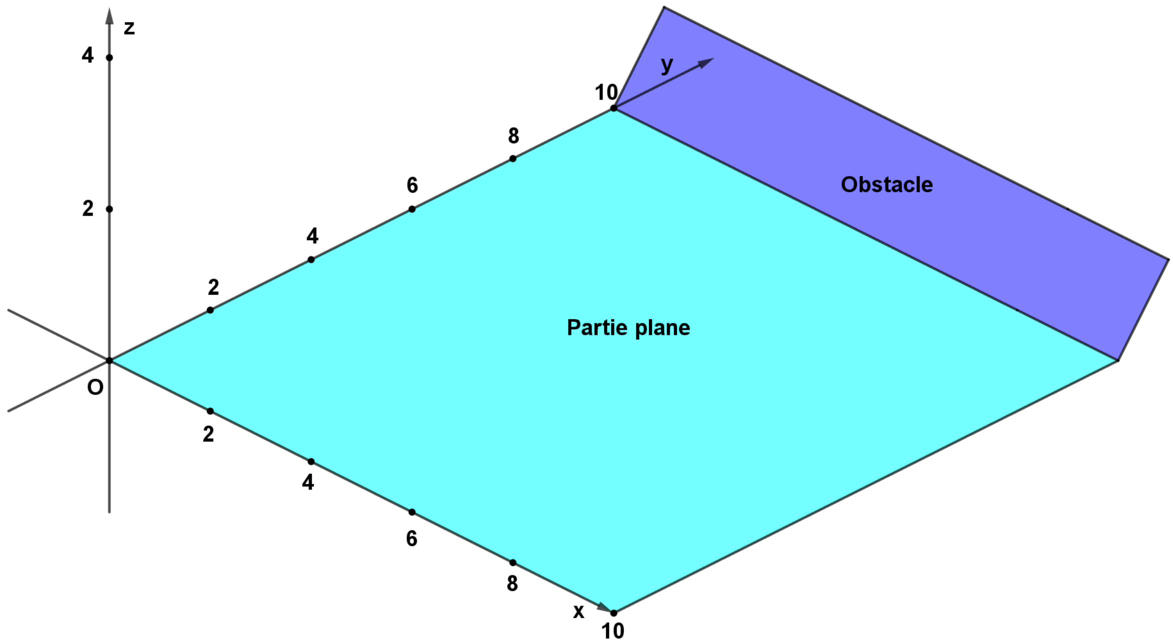
EXERCICE 2 — 5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.
On considère un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :
O(0;0;0) ; P(0;10;0) ; Q(0;11;1) ; T(10;11;1) ; U(10;10;0) et (10;0;0)
La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :
- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2;4;0,25) et B(2;6;0,75) ;
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4;6;0,25) et D(2;6;0,25)

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2.a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(0;1;-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).
2.b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2;\frac{37}{3};\frac{7}{3}\right)$.

4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires des deux drones.
L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.
Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).
Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=b\overrightarrow{CD}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont (2-2b;2-2a;-0,5).

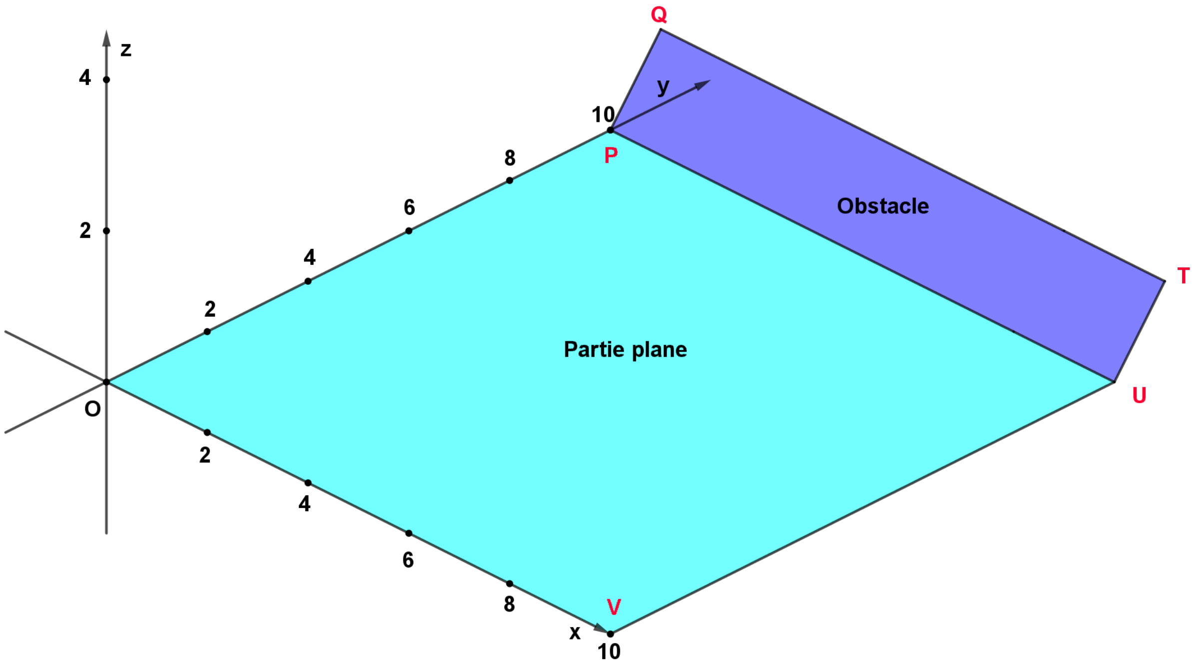
2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).

Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a=\frac{16}{17}$ et $b=1$.

3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

CORRECTION

On place les points O ; P ; Q;T ; U et V sur la figure donnée dans l'énoncé.



Partie A : Étude de la trajectoire d'Alex

1. A(2;4;0,25) B(2;6;0,75)

(AB) est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\0,5\end{pmatrix}$ passant par le point A(2;4;0,25).

(AB) : $\begin{cases} x = 0t+2 \\ y = 2t+4 \\ z = 0,5t+0,25 \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

2.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (PQU) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQU). Par exemple $\overrightarrow{PU}$ et $\overrightarrow{PQ}$.

P(0;10;0) Q(0,11;1) U(10;10;0)

$\overrightarrow{PU}\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PU}.\vec{n}=10\times0+0\times1+0\times(-1)=0$

$\overrightarrow{PQ}.\vec{n}=0\times0+1\times1+1\times(-1)=0$

<u>Conséquence</u>

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (PQU).

2.b. M(x;y;z) appartient au plan (PQU) si et seulement si $\overrightarrow{PM}.\vec{n}=0$.

$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x\\y-10\\z\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow x\times0+(y-10)\times1+z\times(-1)=0 \Leftrightarrow y-z-10=0$

(PQU) **: y – z – 10 = 0**

3. Pour déterminer l'intersection du plan (PQU) et de la droite (AB), on résout le système suivant :

$$\begin{cases} y-z-10= & 0 \\ x= & 2 \\ y= & 2t+4 \\ z= & 0{,}5t+0{,}25 \end{cases}$$

On obtient : $2t+4-(0{,}5t+0{,}25)-10=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1{,}5t-6{,}25=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\dfrac{6{,}25}{1{,}5}=\dfrac{625}{150}=\dfrac{25}{6}$

$x=2 \qquad y=0{,}5\times\dfrac{25}{6}+0{,}25=\dfrac{25}{3}+4=\dfrac{25}{3}+\dfrac{12}{3}=\dfrac{37}{3} \qquad z=0{,}5\times\dfrac{25}{6}+0{,}25=\dfrac{12{,}5}{6}+\dfrac{1{,}5}{6}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$

(PQU) et (AB) sont sécants en $I\left(2;\dfrac{37}{3};\dfrac{7}{3}\right)$.

4. (PQU) est le plan contenant l'obstacle.
Tout point de l'obstacle a une cote inférieure ou égale à 1 or la droite (AB), portant la trajectoire du drone d'Alex coupe le plan (PQU) en I de cote $\dfrac{7}{3}>1$ donc **le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.**

Partie A : distance minimale entre les deux trajectoires

1. C(4;6;0,25) D(2;6;0,25) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\0{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}=a\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2a\\0{,}5a\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CN}=b\,\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2b\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

A(2;4;0,25) C(4;6;0,25) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ $-\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}0\\-2a\\-0{,}5a\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0+2-2b\\-2a+2+0\\-0{,}5a+0+0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}2-2b\\-2a+2\\-0{,}5a\end{pmatrix}$

2. (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite(CD) (perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2-2b)\times 0+(-2a+2)\times 2+(-0{,}5a)\times 0{,}5=0 \quad\Leftrightarrow\quad -4a+4-0{,}25a=0$

$\Leftrightarrow\quad -4{,}25a+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=\dfrac{4}{4{,}25}=\dfrac{4\times 4}{4{,}25\times 4}=\dfrac{16}{17}$.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2-2b)\times(-2)+(-2a+2)\times 0+(-0{,}5a)\times 0=0 \quad\Leftrightarrow\quad -4+4b=0 \quad\Leftrightarrow\quad b=\dfrac{4}{4}=1$

<u>Conclusion</u>

La distance MN est minimale pour $a=\dfrac{16}{17}$ et $b=1$.

3. $MN^2=(2-2b)^2+(-2a+2)^2+(-0{,}5a)^2=(2-3217)^2+\left(-\dfrac{8}{17}\right)^2=\dfrac{4}{17^2}+\dfrac{64}{17^2}=\dfrac{68}{17^2}$

$MN=\dfrac{\sqrt{68}}{17}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}=0{,}48$ **à** 10^{-2} près.

L'unité est égale à 10 m donc la distance minimale est supérieure à 4 m.

La condition imposée est vérifiée.