EXERCICE 3 — 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère le nombre complexe $c=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\frac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :**

   Le nombre c peut s'écrire $c=\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$.

2. **Affirmation 2 :**
   Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.

3. **Affirmation 3 :**
   Les points O, S et T sont alignés.

4. **Affirmation 4 :**
   Pour tout entier naturel non nul n,
   $|c|+|c^2|+\ldots+|c^n|=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

CORRECTION

1. Affirmation 1 : **FAUSSE**

Justification

$$c=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})\neq\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$$

2. Affirmation 2 : **VRAIE**

Justification

$$c=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad c^2=\frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad c^3=c^2\times c=\frac{1}{8}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{8}e^{i\pi}=-\frac{1}{8}$$

Pour $n=0$, on convient que $c^0=1$ nombre réel.

Pour tout entier naturel non nul n, $c^{3n}=(c^3)^n=\left(-\frac{1}{8}\right)^n$ nombre réel.

3. Affirmation 3 : **VRAIE**

Justification

$\arg(c^2)=\frac{2\pi}{3}\quad(2\pi)$ donc $(\vec{u};\overrightarrow{OS})=\frac{2\pi}{3}\quad(2\pi)$

$\arg\left(\frac{1}{c}\right)=-\arg(c)\quad(2\pi)$ donc $\arg\left(\frac{1}{c}\right)=-\frac{\pi}{3}\quad(2\pi)$ et $(\vec{u};\overrightarrow{OT})=-\frac{\pi}{3}\quad(2\pi)$

$(\overrightarrow{OT};\overrightarrow{OS})=(\overrightarrow{OT};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{OS})\quad(2\pi)$

$(\overrightarrow{OT};\overrightarrow{OS})=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\quad(2\pi)$

$(\overrightarrow{OT};\overrightarrow{OS})=\pi\quad(2\pi)$ donc les points O, S et T sont alignés.

4. Affirmation 4 : **VRAIE**

Justification

$c=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad |c|=\frac{1}{2}$ pour entier naturel non nul n, $|c^n|=|c|^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\sigma=|c|+|c^2|+\ldots+|c^n|=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique.

$\sigma-\frac{1}{2}\sigma=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad \frac{1}{2}\sigma=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ donc $\sigma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

