EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».

On sait que :

. si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,5 et celle qu'il soit pluvieux est 0,1.

. si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,2 et celle qu'il soit pluvieux est 0,7.

. si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,6 et celle qu'il soit ensoleillé 0,2.

Pour tout entier naturel n, on note les événements :

. A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ;

. B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours » ;

. C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ».

Pour tout entier naturel, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des événements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n+b_n+c_n=1$.

On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.

On a donc $a_0=1$, $b_0=0$ et $c_0=0$.

1.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}5\,a_n+0{,}1\,b_n+0{,}2\,c_n$.

1.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}3\,a_n-0{,}1\,b_n+0{,}2$

On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1}=0{,}2\,a_n+0{,}2$

2. On considère les matrices :

$$M=\begin{pmatrix}0{,}3 & -0{,}1\\ 0{,}2 & 0\end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} \qquad R=\begin{pmatrix}0{,}2\\ 0{,}2\end{pmatrix}$$

2.a. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=MU_n+R$

2.b. Soit $Y=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ tel que $Y=MY+R$. Démontrer que $\alpha=\beta=0{,}25$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n=U_n-Y$

3.a. En utilisant la question 2., vérifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=MU_n$

3.b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier strictement positif, $V_n=M^nV_0$

4. On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,

$$M^n=\begin{pmatrix}2\times0{,}2^n-0{,}1^n & 0{,}1^n-0{,}2^n\\ 2\times0{,}2^n-2\times0{,}1^n & 2\times01^n\,0{,}2^n\end{pmatrix}$$

4.a. Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

4.b. Déterminer la limite de la suite (a_n) .

4.c. On admet que, pour tout entier naturel n, $c_n=0{,}5+3\times0{,}1^n-3{,}5\times0{,}2^n$.

La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser 0,5 ?

CORRECTION

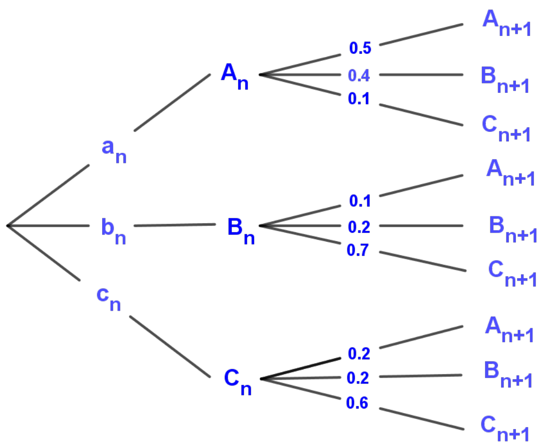
1. On se propose d'écrire les données de l'exercice en utilisant un arbre pondéré.
Ce résultat n'est pas demandé.

. Si le temps est ensoleillé, un jour donné, la probabilité qu'il se soit encore le lendemain est 0,5 et celle qu'il soit pluvieux est 0,1.
Pour tout entier naturel n :
$P_{A_n}(A_{n+1})=0{,}5$ et $P_{A_n}(C_{n+1})=0{,}1$ donc $P_{A_n}(B_{n+1})=1-0{,}5-0{,}1=0{,}4$.

. Si le temps est nuageux sans pluie, un jour donné,la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,2 et celle qu'il soit pluvieux est 0,7.
Pour tout entier naturel n :
$P_{B_n}(B_{n+1})=0{,}2$ et $P_{B_n}(C_{n+1})=0{,}7$ donc $P_{B_n}(A_{n+1})=1-0{,}2-0{,}7=0{,}1$

. Si le temps est pluvieux, un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,6 et celle qu'il soit ensoleillé est 0,2.
Pour tout entier naturel n :
$P_{c_n}(C_{n+1})=0{,}6$ et $P_{C_n}(A_{n+1})=0{,}2$ donc $P_{C-n}(B_{n+1})=1-0{,}6-0{,}2=0{,}2$

. On construit un arbre pondéré



1.a. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
Pour tout entier naturel n :
$$a_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})+P(C_n\cap A_{n+1})$$
$$a_{n+1}=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(A_{n+1})+P(C_n)\times P_{C_n}(A_{n+1})$$
$$a_{n+1}=a_n\times 0{,}5+b_n\times 0{,}1+c_n\times 0{,}2=0{,}5\,a_n+0{,}1\,b_n+0{,}2\,c_n$$

1.b. Pour tout entier naturel n :
$a_n+b_n+c_n=1$ donc $c_n=1-a_n-b_n$
et $a_{n+1}=0{,}5\,a_n+0{,}1\,b_n+0{,}2(1-a_n-b_n)$
$a_{n+1}=0{,}3\,a_n-0{,}1\,b_n+0{,}2$
On admet que $b_{n+1}=0{,}2\,a_n+0{,}2$.

2.a. Pour tout entier naturel n :
$$MU_n+R=\begin{pmatrix}0{,}3 & -0{,}1\\ 0{,}2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}2\\ 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3\,a_n-0{,}1\,b_n\\ 0{,}2\,a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}2\\ 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3\,a_n-0{,}1\,b_n+0{,}2\\ 0{,}2\,a_n+0{,}2\end{pmatrix}$$
$$MU_n+R=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=U_{n+1}$$

2.b. $Y=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$Y=MY+R \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3 & -0{,}1\\ 0{,}2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}2\\ 0{,}2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3\alpha-0{,}1\beta+0{,}2\\ 0{,}2\alpha+0{,}2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0{,}3\alpha-0{,}1\beta+0{,}2\\ \beta=\ \ 0{,}2\alpha+0{,}2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}7\alpha+0{,}1\beta=0{,}2\\ -0{,}2\alpha+\beta=0{,}2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7\alpha+\beta=2\\ -2\alpha+10\beta=2\end{cases}$$

On obtient $-72\alpha=-18 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{-18}{-72}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

$7\times 0{,}25+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=2-1{,}75=0{,}25$

Conclusion

$$Y=\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}25\end{pmatrix}$$

3. Pour tout entier n, $V_n=U_n-R$

3.a. Pour tout entier naturel n :

$MV_n=M(U_n-Y)=MU_n-MY$

Or $U_{n+1}=MU_n+R$ donc $MU_n=U_{n+1}-R$ et $Y=MY+R$ donc $MY=Y-R$

$MV_n=MU_n-MY=U_{n+1}-R-(Y-R)=U_{n+1}-Y=V_{n+1}$

3.b. *Calculs préliminaires*

$a_0=1$ et $b_0=0$ donc $U_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad V_0=U_0-Y=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}75\\ -0{,}25\end{pmatrix}$

$$U_1=MU_0+R=\begin{pmatrix}0{,}3 & -0{,}1\\ 0{,}2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}2\\ 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3+0{,}2\\ 0{,}2+0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}4\end{pmatrix}$$

$$V_1=U_1-Y=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}15\end{pmatrix}.$$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a : $V_n=M^nV_0$.

. Initialisation

Pour $n=1$ $\quad V_1=\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}15\end{pmatrix}$

$$M^1V_0=MV_0=\begin{pmatrix}0{,}3 & -0{,}1\\ 0{,}2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}75\\ -0{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3\times 0{,}75-0{,}1\times(-0{,}25)\\ 0{,}2\times 0{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}225+0{,}025\\ 0{,}15\end{pmatrix}$$

$$M^1V_0=\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}15\end{pmatrix}=V_1.$$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

. Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel non nul n, on suppose que : $V_n=M^nV_0$ et on doit démontrer que $V_{n+1}M^{n+1}V_0$.

Or $M^{n+1}V_0=M(M^nV_0)=MV_n=V_{n+1}$

. Conclusion

Le principe de récurrence , nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $V_n=M^nV_0$.

4.a. $V_n=U_n-Y=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n-0{,}25\\ b_n-0{,}25\end{pmatrix}$

$$V_n=M^nV_0=\begin{pmatrix}2\times 0{,}2^n-0{,}1^n & 0{,}1^n-0{,}2^n\\ 2\times 0{,}2^n-2\times 0{,}1^n & 2\times 0{,}1^n-0{,}2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}75\\ -0{,}25\end{pmatrix}$$

$$V_n=\begin{pmatrix}0{,}75\times(2\times 0{,}2^n-0{,}1^n)-0{,}25\times(0{,}1^n-0{,}2^n)\\ 0{,}75\times(2\times 0{,}2^n-2\times 0{,}1^n)-0{,}25\times(2\times 0{,}1^n-0{,}2^n)\end{pmatrix}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} 1,75\times 0,2^n - 0,1^n \\ 1,75\times 0,2^n - 2,5\times 0,1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n - 0,25 \\ b_n - 0,25 \end{pmatrix}$$

donc $a_n = 1,75^n \times 0,2^n - 0,1^n + 0,25$

4.b. $0 \leqslant 0,1 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$ et $0 \leqslant 0,2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^n = 0$

<u>Conséquence</u>

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,25$

4.c. Pour tout entier naturel n :

$c_n = 0,5 + 3\times 0,1^n - 3,5\times 0,2^n$

$c_n > 0,5 \Leftrightarrow 3\times 0,1^n - 3,5\times 0,2^n > 0 \Leftrightarrow 3\times 0,1^n > 3,5\times 0,2^n \Leftrightarrow \frac{3}{3,5} > \left(\frac{0,2}{0,1}\right)^n \Leftrightarrow \frac{3}{3,5} > 2^n$.

Pour tout entier naturel n : $2^n \geqslant 1$ et $\frac{3}{3,5} < 1$ donc $2^n > \frac{3}{3,5}$.

<u>Conclusion</u>

La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours ne peut pas dépasser 0,5.