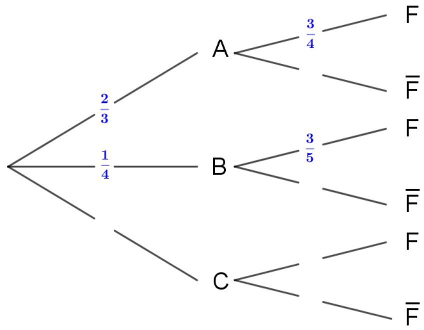
EXERCICE 1 5 points

Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.
Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :
. un panier de petite taille
. un panier de taille moyenne
. un panier de grande taille

Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'oeufs frais. Pour savoir si les adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les événements suivants :
. A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
. B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
. C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
. F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'oeufs frais ».
On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.
1.a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'oeufs frais.
1.b. Calculer $P(B\cap\overline{F})$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
1.c. La livraison d'oeufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'événement F est supérieure à 0,6. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?

2. Dans cette question, on suppose que $P(F)=0{,}675$.
2.a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de F sachant C notée $P_C(F)$ est égale 0,3.
2.b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'oeufs frais.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ? Arrondir le résultat à 10^{-2} .

Partie B

1. la masse en gramme, d'un panier de grande taille peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi normale d'espérance 5000 et d'écart-type 420. Un panier grande taille est déclaré non conforme lorsque sa masse est inférieure à 4,5 kg.
On choisit au hasard un panier de grande taille.
Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit non conforme ?

2. Les responsables de l'association décident de modifier la méthode de remplissage. Avec cette nouvelle mé-

thode, la masse en gramme, d'un panier de grande taille est désormais modélisée par une variable aléatoire, notée Y, suivant la loi normale d'espérance 5000 et d'écart-type σ . La probabilité qu'un panier de grande taille choisit au hasard soit non conforme est alors de 0,04.
Déterminer la valeur de σ arrondie à l'unité.

Partie C

Depuis plusieurs années, les associations distribuant des produits frais à leurs adhérents se développent dans tout le pays et connaissent un succès grandissant.
Lors d'une émission de radio consacrée à ce sujet, un journaliste annonce que 88 % des adhérents de ces associations sont satisfaits.

Un auditeur intervient dans l'émission pour contester le pourcentage avancé par le journaliste, à l'appui de son

propos, l'auditeur déclare avoir réalisé un sondage auprès de 120 adhérents de ces associations et avoir constaté que, parmi eux, seuls 100 ont indiqué être satisfaits.

La contestation de l'auditeur est-elle fondée ?

CORRECTION

Partie A

1.a. On nous demande de calculer $P(A\cap F)$.

$P(A\cap F)=P(A)\times P_A(F)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$ = **0,5.**

1.b. Pour calculer $P(B\cap \bar{F})$, on nous demande de ne pas calculer $P_B(\bar{F})$.

Le théorème des probabilités totales, nous donne :

$P(B)=P(B\cap F)+P(B\cap\bar{F})$ soit $P(B\cap\bar{F})=P(B)-P(B\cap F)$

$P(B)=\frac{1}{4}=0{,}25$ $P(B\cap F)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}=0{,}15.$

$P(B\cap\bar{F})=0{,}25-0{,}15$ = **0,1.**

$P(B\cap\bar{F})$ est la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de taille moyenne et ne sont pas intéressée par une livraison d'oeufs frais.

1.c. En utilisant le théorème des probabilités totales :

$P(F)=P(A\cap F)+P(B\cap F)+P(C\cap F)$

$P(A\cap F)=0{,}5$ $P(B\cap F)=0{,}15$ $P(C\cap F)\geqslant 0$

$P(F)\geqslant 0{,}5+0{,}15=0{,}65>0{,}6$.

On peut affirmer que la livraison d'oeufs frais sera mise en place.

2.a. On suppose que $P(F)=0{,}675$.

$P(C\cap F)=P(F)-P(A\cap F)-P(B\cap F)$

$P(C\cap F)=0{,}675-0{,}5-0{,}15=0{,}025$

$P(A)+P(B)+P(C)=1 \Leftrightarrow P(C)=1-P(A)-P(B)$

$P(C)=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{12-8-3}{12}=\frac{1}{12}$

$P_C(F)=\frac{P(C\cap F)}{P(C)}=0{,}025\times 12$ = **0,3.**

2.b. On nous demande de calculer $P_F(A)$.

$P_F(A)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{0{,}5}{0{,}675}$ = **0,74 à 10^{-2} près.**

Partie B

1. X suit la loi normale d'espérance 5000 et d'écart-type 420.

Un panier est déclaré non conforme lorsque sa masse est inférieure à 4,5 kg soit $X\leqslant 4500$.

En utilisant la calculatrice on obtient : $P(X\leqslant 4500)$ = **0,1169.**

2. Y suit la loi normale d'espérance 5000 et d'écart-type σ.

$Z=\frac{Y-5000}{\sigma}$ suit la loi normale réduite et centrée.

$(Y\leqslant 4500) \Leftrightarrow \left(\frac{Y-5000}{\sigma}\leqslant\frac{4500-5000}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \left(Z\leqslant -\frac{500}{\sigma}\right)$

La probabilité pour que le panier de grande taille ne soit pas conforme est : $P\left(Z\leqslant-\frac{500}{\sigma}\right)$.

En utilisant la calculatrice, on détermine a tel que $P(Z\leqslant a)=0{,}04$. on obtient $a=-1{,}7507$.

$-1{,}7507=-\frac{500}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma=\frac{500}{1{,}7507}$ = **285 à l'unité près.**

Partie C

Le journaliste affirme que la probabilité qu'un adhérent choisi au hasard soit satisfait est p=0,88.
La fréquence, qu'un adhérent soit satisfait, constatée, sur un échantillon d'effectif n=120 est :
$f=\frac{100}{120}=\frac{12}{12}=0{,}833$ à 10^{-3} près.
$n=120\geqslant 30$ $\quad np=105{,}6$ $\quad n(1-p)=14{,}4\geqslant 5$.
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$I=\left[0{,}88-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}88\times 0{,}12}{120}};0{,}88+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}88\times 0{,}12}{120}}\right]$$

$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}88\times 0{,}12}{120}}=0{,}06$ à 10^{-2} près.
$I=[0{,}82;0{,}94]$
f=0,833 appartient à I.
Au seuil de 95 %, la contestation de l'auditeur n'est pas fondée.