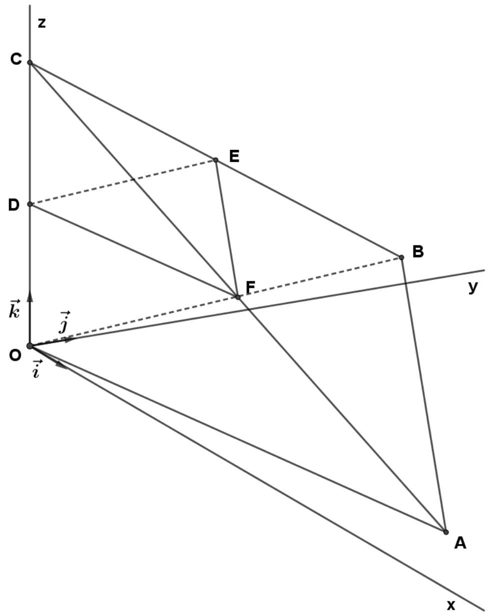
EXERCICE 2 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(10;0;1)$; $B(1;7;1)$ et $C(0;0;5)$.



1.a. Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.
1.b. Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième.

2. Vérifier que $7x+9y-70z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).

4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan P parallèle au plan (OAB) passant par D.

5. Le plan P coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F.
Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2};3\right)$.

6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite(AB).

CORRECTION

1.a. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}10\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\7\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=10\times1+0\times7+1\times1=11\neq0$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas orthogonaux donc **les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.**

1.b. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos(\widehat{AOB})$

$OA^2=10^2+0^2+1^2=101$ $OA=\sqrt{101}$ $OB^2=1^2+7^2+1^2=51$ $OB=\sqrt{51}$

$\cos(\widehat{AOB})=\dfrac{11}{\sqrt{101}\times\sqrt{51}}=0,153$ à 10^{-3} près.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\widehat{AOB}$ **= 81,2°** arrondi au dixième.

2. $\widehat{AOB}\neq0^\circ$ et $\widehat{AOB}\neq180^\circ$, donc ls points A, O et B ne sont pas alignés.

Pour vérifier que 7x+9y-70z=0 est une équation cartésienne du plan (OAB), il suffit de vérifier que les coordonnées des points O, A et B sont des solutions de l'équation : 7x+9y-70z=0.

O(0;0;0) $7\times0+9\times0-70+0=0$

A(10;0;1) $7\times10+9\times0-70\times1=70-70=0$

B(1;7;1) $7\times1+9\times7-70\times1=7+63-70=0$

3. La droite (CA) est la droite passant par C(0;0;5) et de vecteur $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}10\\0\\-4\end{pmatrix}$.

(CA) : $\begin{cases}x=10t\\y=0\\z=-4t+5\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

4. $D\left(0;0;\dfrac{5}{2}\right)$.

Un plan P parallèle à (OAB) a pour équation : 7x+9y-70z+k=0 avec k constante réelle.

D appartient à P : $7\times0+9\times0-70\times\dfrac{5}{2}+k=0 \Leftrightarrow k=5\times35=175$.

P : 7x+9y-70z+175=0

5. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection F du plan P et de la droite (CB), on résout le système :

$$\begin{cases}7x+9y-70z+175=0\\x=10t\\y=0\\z=-4t+5\end{cases}$$

On obtient : $7\times10t+9\times0-70(-4t+5)+175=0 \Leftrightarrow 70t+280t-350+175=0 \Leftrightarrow 350t=175 \Leftrightarrow t=\dfrac{175}{350}=\dfrac{1}{2}=0,5$

.

$x=10\times0,5=5$ $y=0$ $z=-4\times0,5+5=3$

F(5;0;3).

6. On admet que $E\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2};3\right)$ E(0,5;3,5;3)

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4,5\\-3,5\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\7\\0\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{EF}$.

Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

(On peut aussi démontrer que E est le milieu de [AB]).