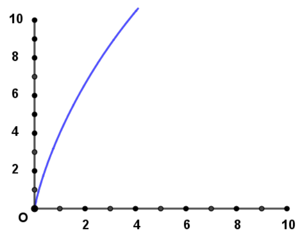
EXERCICE 3 — 5 points

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=4x-x\ln(x)$.
On admet ue la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

Partie A



Le graphique ci-dessus représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève les deux conjectures suivantes :
. il semble que la fonction g soit positive ;
. il semble que la fonction g soit strictement croissante.
L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x)=0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Déterminer le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1.a. On rappelle que : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$. En déduire que $\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$.
1.b. Calculer la limite de g(x) lorsque x tend vers 0.

2.a. Démontrer que,pour tout réel x strictement positif, $g'(x)=3-\ln(x)$.
2.b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. On désigne par G la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x)=\frac{1}{4}x^2(9-2\ln(x))$.

On admet que la fonction G est dérivable sur $]0;+\infty[$.
3.a. Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0;+\infty[$
3.b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« il n'existe réel α strictement supérieur à 1 tel que $\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x=0$ ».

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $g(x)=4x-x\ln(x)$.
$g(x)=x(4-\ln(x))=0 \Leftrightarrow 4-\ln(x)=0$ (car $x>0$) $\Leftrightarrow \ln(x)=4 \Leftrightarrow x=e^4$.
$\mathcal{S}=\{e^4\}$

2. $g(x)>0 \Leftrightarrow 4-\ln(x)>0$ (car $x>0$) $\Leftrightarrow 4>\ln(x) \Leftrightarrow e^4>x$.
On donne le signe de g(x) sous la forme d'un tableau.

x	0		e^4		$+\infty$
g(x)	||	+	0	−	

3. Les conjectures ne sont pas vérifiées.
. Si $x>e^4$ alors $g(x)<0$ donc g n'est pas positive sur $]0;+\infty[$.
. $g(e^4-1)>0$ et $g(e^4+1)<0$ donc g n'est pas croissante sur $]0;+\infty[$.

Partie B

1.a. Pour $x>0$, on pose $t=\frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} t=+\infty$.

$$\frac{\ln(t)}{t}=x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-x\ln(x)$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$$

1.b. $g(x)=4x-x\ln(x)$
$\lim\limits_{x\to 0} 4x=0 \quad \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$
donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

2.a. $g(x)=4x-x\ln(x) \quad (\ln(x))'=\frac{1}{x}$
$g'(x)=4-(\ln(x)+1)=3-\ln(x)$

2.b. $3-\ln(x)=0 \Leftrightarrow 3=e^3 \quad 3-\ln(x)>0 \Leftrightarrow 3>\ln(x) \Leftrightarrow e^3>x$
$g(x)=x(4-\ln(x))$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(4-\ln(x))=-\infty$
Pour le produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$
Tableau de variation de g.

x	0		e^3		$+\infty$
g'(x)	||	+	0	−	
g(x)	|| 0	↗	e^3	↘	$-\infty$

$g(e^3)=e^3(4-\ln(e^3))=e^3$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$$G(x)=\frac{1}{4}x^2(9-\ln(x))\,.$$

3.a. G est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\left(\frac{1}{4}x^2\right)'=\frac{1}{2}x \qquad (9-2\ln(x))'=-\frac{2}{x}$$

$$G'(x)=\frac{1}{2}x(9-2\ln(x))+\frac{1}{4}x^2\left(-\frac{2}{x}\right)=\frac{9}{2}x-x\ln(x)-\frac{1}{2}x=4x-x\ln(x)$$

$$G'(x)=g(x)$$

G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

3.b. Affirmation : **FAUSSE**

Justification

Soit F la fonction définie, pour tout nombre réel t de l'intervalle $]1;+\infty[$ pat :

$$F(t)=\int_1^t g(x)\,dx\,.$$

$$F(t)=G(t)-G(1)=\frac{1}{4}t^2(9-2\ln(t))-\frac{9}{4}$$

$$F'(t)=G'(t)=g(t)$$

t	1		e^4		$+\infty$
F'(t)		+	0	−	
F(t)		↗		↘	

$$F(e^4)=\frac{1}{4}e^8(9-8)-\frac{9}{4}=\frac{1}{4}e^8-\frac{9}{4}>0$$

$$F(e^5)=\frac{1}{4}e^{10}(9-10)-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}e^{10}-\frac{9}{4}<0$$

F est continue et strictement décroissante sur $[e^4;e^5]$, $F(e^4)>0$ et $F(e^5)<0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[e^4;e^5]$ tel que $F(\alpha)=0$.

Et $F(\alpha)=\int_1^{\alpha} g(x)\,dx$.