EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par : $p_n = n^2 - 42n + 4$.
Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
- $u_0 = a$ et , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$.
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n$.
Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}$.

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les varriables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.
Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

u $\leftarrow \frac{1}{2}$
i $\leftarrow$ 0
Tant que i < n
  u $\leftarrow \frac{2u}{u+1}$
  i $\leftarrow$ i + 1
Fin Tant que
	u $\leftarrow \frac{1}{2}$
	Pour i allant de 0 à n
	  u $\leftarrow \frac{2u}{u+1}$
	Fin Pour
		p $\leftarrow 2^n$
		u $\leftarrow \frac{p}{p+1}$

CORRECTION

1. Affirmation 1 : **FAUSSE**

Justification

Pour tout entier naturel n :

$p_{n+1}-p_n=(n+1)^2-42(n+1)+4-n^2+42n-4=n^2+2n+1-42n-42+4-n^2+42n-4=2n-41$

Si $n\geqslant 21$ alors $p_{n+1}-p_n>0$.

La suite (p_n) est strictement croissante à partir du rang 21.

2. Affirmation 2 : **VRAIE**

Justification

Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}^2-1=\frac{1}{9}(u_n^2-8)-1=\frac{1}{9}n_n^2+\frac{8}{9}-1=\frac{1}{9}u_n^2-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\left(u_n^2-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}v_n$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{9}$.

3. Affirmation 3 : **VRAIE**

Justification

Pour tout entier naturel n :

$n^2\leqslant(n+1)^2w_n\leqslant n^2+n$

$(n+1)^2>0$ donc

$$\frac{n^2}{(n+1)^2}\leqslant w_n\leqslant\frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{(n+1)^2}=1$$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=1$.

Partie B

$U_0=\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n $U_{n+1}=\frac{2U_n}{1+U_n}$.

1. $U_1=\frac{2U_0}{1+U_0}$ $\qquad U_0=2\times\frac{1}{2}=1$ $\qquad 1+U_0=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$U_1=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$U_n=\frac{2^n}{1+2^n}$.

Initialisation

Pour $n=0$ $\quad U_0=\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{2^0}{1+2^0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ donc $\quad U_0=\frac{2^0}{1+2^0}$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $U_n=\frac{2^n}{1+2^n}$ et on doit démontrer $U_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$.

Or $U_{n+1}=\frac{2U_n}{1+U_n}$ $\quad 2U_n=2\times\frac{2^n}{1+2^n}=\frac{2^{n+1}}{1+2^n}$ $\quad 1+U_n=1+\frac{2^n}{1+2^n}=\frac{1+2^n+2^n}{1+2^n}=\frac{1+2\times 2^n}{1+2^n}=\frac{2^{n+1}}{1+2^n}$

donc $U_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1+2^n}\times\frac{1+2^n}{1+2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $U_n=\frac{2^n}{1+2^n}$.

3. Pour l'algorithme 2, il faut écrire l'instruction : « Pour i allant de 0 à **n-1** » pour que u contienne U_n en fin d'exécution.
Pour l'algorithme 2, u contient U_{n+1} en fin d'exécution.