EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une ville possède deux ports maritimes :
. un port de plaisance A ;
. un port de commerce B.
Le port de plaisance A n'a pas d'accès direct à l'océan mais est relié au port de commerce B qui, lui, est ouvert sur l'océan. Un passant, installé en terrasse sur le port de plaisance A, jette une bouteille dans l'eau.
À l'instant 0, la bouteille se trouve dans le port A.
Soit n un entier naturel.
On admet que :

. quand la bouteille est dans le port A au bout de n heures, la probabilité qu'elle y soit l'heure suivante est $\frac{3}{5}$;
. quand la bouteille est dans le port B au bout de n heures, la probabilité qu'elle soit dans le port A l'heure suivante est $\frac{1}{10}$ et la probabilité qu'elle se trouve toujours dans le port B l'heure suivante est $\frac{1}{15}$;
. le port A n'ayant pas d'accès direct à l'océan, lorsque la bouteille est dans le port A, elle ne peut pas se trouver dans l'océan l'heure suivante ;
. une fois dans l'océan la bouteille ne revient jamais dans les ports.

Soient les événements :
. A_n **:** « la bouteille se trouve dans le port A au bout de n heures » ;
. B_n : « la bouteille se trouve dans le port B au bout de n heures » ;
. C_n : « la bouteille se trouve dans l'océan au bout de n heures ».

On note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.
Ainsi on a $a_0=1$, $b_0=0$ et $c_0=0$.

1.a. Compléter l'arbre fourni en **ANNEXE** à rendre avec la copie.
1.b. Démontrer que pour tout enter naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n\frac{1}{10}b_n n \\ b_{n+1}=\frac{2}{5}a_n+\frac{1}{15}b_n \end{cases}$$

Soient les matrices suivantes :

$$M=\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

1.c. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n, $U_n=M^n U_0$.

2.a. Donner U_0 .
2.b. Calculer M^2 en détaillant les calculs de l'un des coefficients et en déduire qu'il existe un réel k tel que $M^2=kM$.
2.c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif,

$$M^n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M .$$

2.d. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$U_n=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

3.a. Démontrer que la probabilité que la bouteille soit dans l'océan au bout de n heures est égale à $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

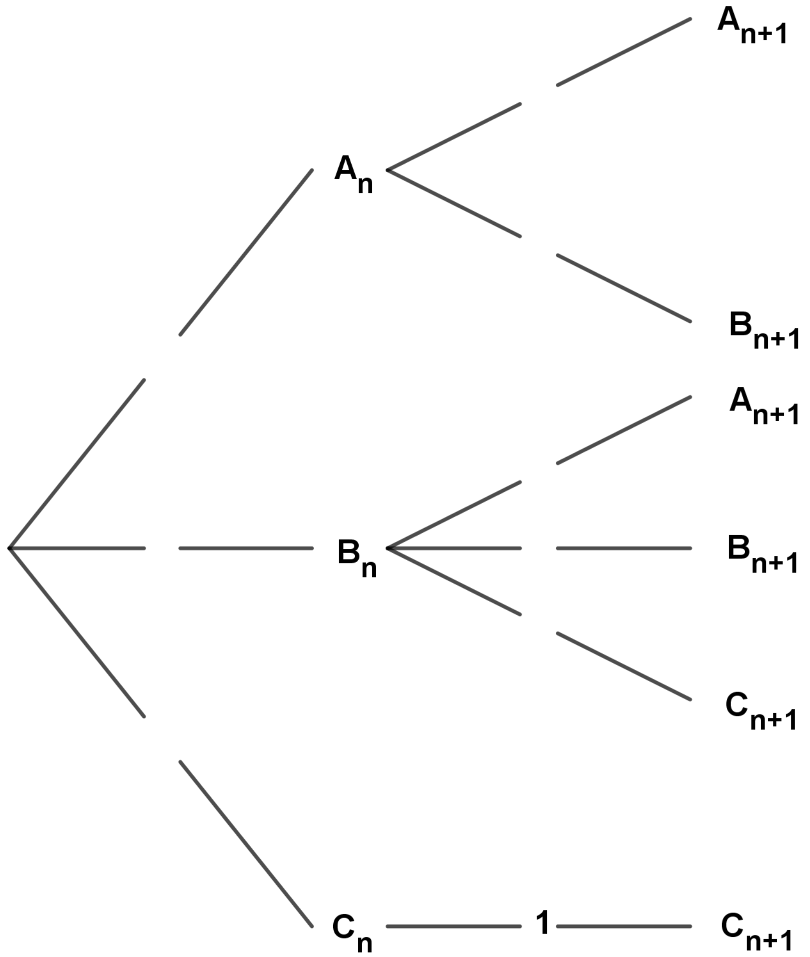
3.b. On considère l'algorithme ci-dessous :

n ← 1
Tant que $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 0.9$
  n ← n+1
Fin Tant que

Indiquer sans justification le nombre contenu dans le variable n de cet algorithme à la fin de son exécution.

Interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.

À RENDRE AVEC LA COPIE
ANNEXE



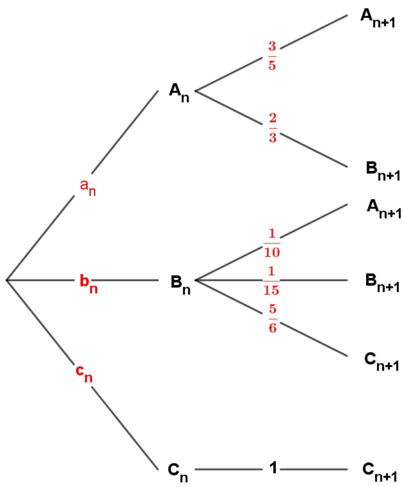
CORRECTION

1.a. En utilisant les données de l'exercice, on obtient :

$$P_{A_n}(A_{n+1})=\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(B_{n+1})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

$$P_{B_n}(A_{n+1})=\frac{1}{10} \quad \text{et} \quad P_{B_n}(B_{n+1})=\frac{1}{15} \quad \text{donc} \quad P_{B-n}(C_{n+1})=1-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{30-3-2}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

On complète l'arbre pondéré :



1.b. En utilisant, l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(A_{n+1})=P(A-n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})+P(C_n\cap A_{n+1}) = P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(A_{n+1})+0$$

$$P(A_{n+1})=a_n\times\frac{3}{5}+b_n\times\frac{1}{10}$$

$$P(B_{n+1})=P(A_n\cap B_{n+1})+P(B_n\cap B_{n+1})+P(C_n\cap B_{n+1})=P(A_n)\times P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1})+0$$

$$P(B_{n+1})=a_n\times\frac{3}{5}+b_n\times\frac{1}{15}$$

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+\frac{1}{10}\times b_n \\ b_{n+1}=\frac{2}{5}a_n+\frac{1}{15}b_n \end{cases}$$

1.c. Pour tout entier naturel n.

$$MU_n=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}18 & 3\\ 12 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}18a_n+3b_n\\ 12a_n+2b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}a_n+\frac{1}{10}b_n\\ \frac{2}{5}a_n+\frac{1}{15}b_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{n+1}=MU_n$$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a $U_n=M^nU_0$.

Initialisation

Pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=MU_n$ donc pour $n=0$ on obtient $U_1=MU_0$ soit $U_1=M^1U_0$.

La propriété $U_n=M^nU_0$ est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, strictement positif, on suppose que $U_n=M^nU_0$ et on doit démontrer que $U_{n+1}=M^{n+1}U_0$.

Or $U_{n+1}=MU_n=M(M^nU_0)=M^{n+1}U_0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, strictement positif,on a : $U_n=M^nU_0$.

2.a. $a_0=1$ et $b_0=0$ donc $U_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

2.b. $M^2=\frac{1}{900}\begin{pmatrix}18 & 3\\12 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & 3\\12 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{900}\begin{pmatrix}18^2+3\times 12 & 18\times 3+3\times 2\\12\times 18+2\times 12 & 12\times 3+2\times 2\end{pmatrix}=\frac{1}{900}\begin{pmatrix}324+36 & 54+6\\216+24 & 36+4\end{pmatrix}$

$M^2=\frac{1}{900}\begin{pmatrix}360 & 60\\240 & 40\end{pmatrix}=\frac{1}{90}\begin{pmatrix}36 & 6\\24 & 4\end{pmatrix}=\frac{2}{90}\begin{pmatrix}18 & 3\\12 & 2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{30}\begin{pmatrix}18 & 3\\12 & 2\end{pmatrix}$

$M^2=\frac{2}{3}M$ donc $k=\frac{2}{3}$

2.c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul on a : $M^n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M$.

Initialisation

Pour $n=1$ on a $M^1=\left(\frac{2}{3}\right)^0 M$.

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $M^n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M$ et on doit démontrer que $M^{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n M$.

$M^{n+1}=M^n\times M=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M\times M=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M^2=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)M=\left(\frac{2}{3}\right)^n M$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $M^n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M$.

2.d. Pour tout entier naturel n, strictement positif, $U_n=M^nU_0=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}MU_0$.

$M=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}18 & 3\\12 & 2\end{pmatrix}$ $U_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $MU_0=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}$

$U_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$.

3.a. Pour tout entier naturel n strictement positif,

$a_n=\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $b_n=\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $a_n+b_n=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

On a : $a_n+b_n+c_n=1 \Leftrightarrow c_n=1-(a_n+b_n)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

3.b. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<0,9 \Leftrightarrow 0,1<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(On peut résoudre cette inéquation mais cette résolution n'est pas demandée).

En utilisant la calculatrice on obtient $\left(\frac{2}{3}\right)^5=0,13$ à 10^{-2} près et $\left(\frac{2}{3}\right)^6=0,09$ à 10^{-2} près.

Le contenu dans la variable n de cet algorithme à la fin de son exécution est : **7.**

Au bout de 7 heures la probabilité que la bouteille se trouve dans l'océan est supérieure ou égale à 0,9.