EXERCICE 1 6 points

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température exprimée en degré Celsius, supposée constante notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0=80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :
$T_{n+1}-T_n=k(T_n-M)$ où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M=10$ et $k=-0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1}-T_n=-0,2(T_n-10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n)?

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1}=0,8T_n+2$.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n=T_n-10$.
3.a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
3.b. Montrer que, que pour tout entier naturel n, on a : $T_n=70\times0,8^n+10$.
3.c. Déterminer la limite de la suite (T_n).

4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

4.a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'algorithme ?
4.b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0)=80$.
Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t)=-0,2(\theta(t)-M)$$

1. Dans cette question on choisit M=0. On cherche alors une fonction dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ vérifiant $\theta(0)=80$ et, pour tout réel de cet intervalle : $\theta'(t)=-0,2\theta(t)$.

1.a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(t)=\dfrac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t)=0$.

1.b. En conservant l'hypothèse du **a.** calculer f(0).
En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, une expression de f(t) puis de $\theta(t)$.

1.c. Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit M=10. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0;+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$:
$g(t)=10+70e^{-0,2t}$, où t est exprimé en minute et g(t) en degré Celsius.
Une personne aime boire son café à 40°C.
Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0;+\infty[$ tel que $g(t_0)=40$.
Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

CORRECTION

Partie A

1. Le café refroidit jusqu'à la température ambiante donc la suite (T_n) est décroissante.

2. $T_0=80$ et pour tout entier naturel n : $T_{n+1}-T_n=-0,2(T_n-10)$ $\Leftrightarrow$ $T_{n+1}=T_n-0,2T_n+0,2\times 10$
$\Leftrightarrow$ $T_{n+1}=0,8T_n+2$

3. Pour tout entier naturel n, $u_n=T_n-10$ donc $T_n=u_n+10$.
3.a. Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=T_{n+1}-10=0,8T_n+2-10=0,8(u_n+10)-8=0,8u_n+8-8=0,8u_n$
(u_n) est la suite géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme $u_0=T_0-10=80-10=70$.
3.b. Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0\times q^n=70\times 0,8^n$ donc $T_n=u_n+10=70\times 0,8^n+10$.
3.c. $0\leqslant 0,8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=10$.

4.a. $T \leftarrow 80\geqslant 40$
$n \leftarrow 0$
Première boucle
$T \leftarrow 64+2=66\geqslant 40$
$n \leftarrow 1$
Deuxième boucle
$T \leftarrow 52,8+2=54,8\geqslant 40$
$n \leftarrow 2$
Troisième boucle
$T \leftarrow 43,84+2=45,84\geqslant 40$
$n \leftarrow 3$
Quatrième boucle
$T \leftarrow 36,672+2=38,672$ < 40
$n \leftarrow 4$
La valeur de n à la fin de l'exécution de l'algorithme est : 4.
4.b. Au bout de 4 min la température du café est inférieure à 40°C.

Partie B

1.a. Pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(t)=\dfrac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}=\theta(t)\times e^{0,2t}$
$\theta'(t)=-0,2\theta(t)$ et $(e^{0,2t})'=0,2e^{0,2t}$.
$f'(t)=\theta'(t)\times e^{0,2t}+\theta(t)\times(0,2e^{0,2t})=-0,2\theta(t)\times e^{0,2t}+0,2\theta(t)\times e^{0,2t}=0$
1.b. $\theta(0)=80$ $e^{02\times 0}=1$ donc $f(0)=80\times 1=80$
$f'(t)=0$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ donc f est une fonction constante sur $[0;+\infty[$.
$f(0)=80$ donc pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(t)=80$.
<u>Conséquence</u>
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$:
$\theta(t)=f(t)\times e^{-0,2t}=80e^{-0,2t}$
1.c. La fonction θ considérée est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et $\theta'(t)=-0,2\times 80e^{-0,2t}=-0,2\theta(t)$
donc θ est solution du problème.

2. Pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(t)=10+70e^{-0,2t}$

Remarque :

$g(0)=10+70e^{0}=10+70=80$

$g(t)=40 \Leftrightarrow 10+70e^{-0,2t}=40 \Leftrightarrow 70e^{-0,2t}=30 \Leftrightarrow e^{-0,2t}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow -0,2t=\ln\left(\frac{3}{7}\right)$

$\Leftrightarrow -0,2t=\ln(3)-\ln(7) \Leftrightarrow t=\frac{\ln(3)-\ln(7)}{-0,2}=\frac{\ln(7)-\ln(3)}{0,2}$

L'équation $g(t)=40$ admet une unique solution $t_0=\frac{\ln(7)-\ln(3)}{0,2}$.

En utilisant la calculatrice :

$t_0=4,236$ à 10^{-3} près

$60\times 0,236=14,16$

donc t_0 = 4min14s valeur arrondie à la seconde

