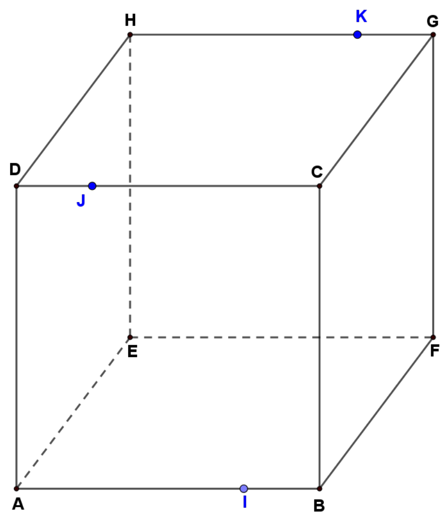
EXERCICE 2 — 4 points

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la La lettre correspond à l'affirmation exacte 0 sinon.
Dans l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace.
Les quatre questions sont indépendantes. **Aucune justification n'est demandée.**

1. On considère le plan P d'équation cartésienne $3x+2y+9z-5=0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=4t+3 \\ y=-t+2 \\ z=-t+9 \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées (3;2;9).
Affirmation B ; le plan P et la droite d sont orthogonaux.
Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.
Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées (-353;91;98).

2. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous et les points I ; J et K définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{HK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$.



Affirmation A : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un triangle.
Affirmation B : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un quadrilatère.
Affirmation C : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone.
Affirmation D : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.

3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x= t+2 \\ y= 2 \\ z= 5t-6 \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$, et le point A(-2;1;0). Soit M un point variable de la droite d.

Affirmation A : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$
Affirmation B : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$
Affirmation C : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (-2;1;0).
Affirmation D : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (2;2;-6).

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x-y+z=0$.

Affirmation A : les plans P et P' sont parallèles.
Affirmation B : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par les points A(5;12;10) et B(3;1;2).
Affirmation C : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point C(2;6;5) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1;2;2)$.
Affirmation D : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point D(-1;0;0) et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(3;6;5)$.

CORRECTION

1. **Affirmation D :** **EXACTE**

Justifications non demandées

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et A(3;2;9) est un point de d.

. **Affirmation A :** **FAUSSE**

Le point A de coordonnées (3;2;9) appartient à la droite d, on regarde si A appartient à P.
Or $3\times3+2\times2+9\times9-5=9+4+81-5=89\neq0$. Donc le point A n'appartient pas à P et l'affirmation A est fausse.

Remarque

Si le point appartenait à P pour pouvoir conclure , il faudrait regarder si la droite d est (on n'est pas) contenue dans P c'est à dire si d est parallèle à P, c'est à dire si d est parallèle à P ; (Cette étude sera faite pour l'affirmation C).

. **Affirmation B :** **FAUSSE**

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires (l'ordonnée et la cote de $\vec{n}$ ne sont pas égales) donc la droite d n'est pas orthogonales au plan P.

. **Affirmation C :** **FAUSSE**

d est parallèle à P si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
$\vec{n}.\vec{u}=3\times4+2\times(-1)+9\times(-1)=12-2-9=1\neq0$
donc d n'est pas parallèle à P.

. **Affirmation D :** **VRAIE**

Pour vérifier, on résout le système :

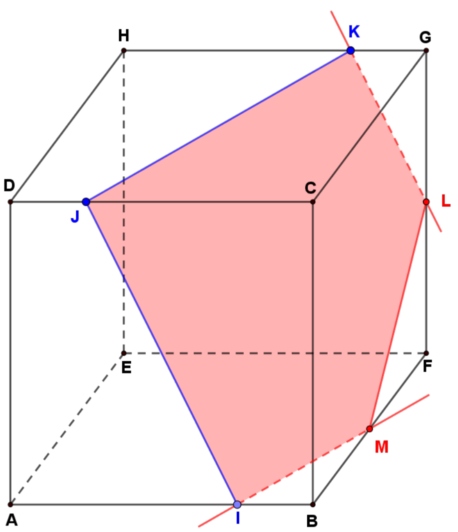
$$\begin{cases}3x+2y+9z-5= & 0\\ x= & 4t+3\\ y= & -t+2\\ z= & -t+9\end{cases}$$

On obtient : $3(4t+3)+2(-t+2)+9(-t+9)-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad 12t+9-2t+4-9t+81-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-89$
$x=4\times(-89)+3=-353 \qquad y=89+2=91 \qquad z=89+9=98$
Les coordonnées du point d'intersection de d et P sont (-353;91;98).

2. **Affirmation C :** **EXACTE**

Justifications non demandées

On construit la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).
Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les deux droites d'intersection sont parallèles



De K on trace la parallèle à (IJ), cette droite coupe le segment [FG] en L.
De I on trace la parallèle à (IJ), cette droite coupe le segment [BF] en M.
La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est donc le pentagone IJKLM.

3. Affirmation B : **EXACTE**

Justifications non demandées

Première méthode :

A(-2;1;0) M(t+2;2;5t-6)

$AM^2=(t+4)^2+(2-1)^2+(5t-6)^2=t^2+8t+16+1+25t^2-60t+36=26t^2-52t+53$

$AM^2=26(t-1)^2+27$

Le minimum de AM^2 est obtenu pour $t=1$ et est égal à 27.

Donc le minimum de AM est égal à $\sqrt{27}$. Le point M obtenu à pour coordonnées (3;2;-1).

Deuxième méthode :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

La distance AM est minimale lorsque la droite (AM) est perpendiculaire à d.

$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1\times(t+4)+0\times1+5\times(5t-6)=t+4+25t-30=0 \quad \Leftrightarrow \quad 26t=26 \quad \Leftrightarrow \quad t=1$

Donc M(3;2;-1) et $AM^2=5^2+1^2+(-1)^2=27$ et $AM=\sqrt{27}$.

4. Affirmation D : **EXACTE**

Justifications non demandées

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P $\quad \vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.

. **Affirmation A :** **FAUSSE**

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires (la cote de $\vec{n}$ n'est pas nulle) donc les plans P et P' ne sont pas parallèles.

. **Affirmation B :** **FAUSSE**

Justifications non demandées

On vérifie si les points A et B appartiennent aux plans P et P'.

Or B(3;1;2) $2\times3-1+2=7\neq0$ donc le point n'appartient pas à P'.

. **Affirmation C :** **FAUSSE**

Justifications non demandées

Le point C appartient aux deux plans P et P'.

$\vec{n}.\vec{u}=1\times1+2\times2-3\times2=-1\neq0$ donc $\vec{u}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\vec{n}$.

. **Affirmation D :** **VRAIE**

Justifications non demandées

Le point D appartient aux deux plans P et P'.

$\vec{n}.\vec{v}=1\times3+2\times6-3\times5=3+12-15=0$

$\vec{n}'.\vec{v}=2\times3-1\times6+0\times5=6-6=0$

Donc la droite passant par D et de vecteur directeur $\vec{v}$ est la droite d'intersection des plans P et P'.